

# Métodos de Iluminação Global Baseados em Fotões

Alexandre António de Oliveira Azevedo

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Roberto Frias, Porto  
Pro07001@fe.up.pt

**Abstract.** Este paper apresenta um estado de arte acerca dos métodos de iluminação global baseados em fotões. Inicialmente é feita uma breve introdução às características da iluminação global, podendo estas ser formuladas como a solução da equação de *rendering* ou da equação potencial. Posteriormente, são analisados diversos métodos de iluminação global baseados em fotões de um modo unificado que também permite fazer comparações.

**Keywords.** Computer Graphics, Global Illumination, Photon Tracing, Light Tracing, Photon Maps, Monte Carlo Ray Tracing, Rendering.

## 1. Introdução

Este documento apresenta uma descrição relativa aos métodos de iluminação global baseados em fotões. Métodos esses que constituem um importante contributo para a evolução da computação gráfica, nomeadamente, a produção de imagens tridimensionais visualmente realistas.

Os algoritmos de iluminação global têm como objectivo a simulação de todas as reflexões de luz numa cena virtual, considerando a reflexão e refração difusas e a reflexão e refração especulares e a representação exacta da intensidade da luz em cada ponto da mesma. A equação de *rendering* constitui a base matemática de todos os algoritmos de iluminação global e pode ser utilizada para calcular a radiação emanada em qualquer superfície num modelo. Devido à sua simplicidade, generalidade e independência dimensional, o método *Monte Carlo* ou o método *random walk* é um dos mais importantes métodos na resolução do difícil problema da iluminação global. Isto acontece, especialmente quando o método Monte Carlo é um método de último recurso quando todos os outros métodos analíticos ou numéricos falham [1].

O transporte de luz ou as múltiplas interacções de luz entre as superfícies que produzem a iluminação global, podem modelar-se ou formular-se pela equação de *rendering* ou pela equação potencial.

Em 1986, com base na física da propagação da luz, Kajiya [2] apresentou a equação de *rendering* ou integral que podia ser vista como o problema central da iluminação global. Kajiya descreveu as aproximações que eram feitas por vários

algoritmos que haviam surgido na computação gráfica, como os algoritmos de iluminação directa, o de radiosidade e o de *ray tracing*. A equação de *rendering* engloba esta grande variedade de algoritmos de *rendering* e proporciona um contexto unificado para os ver como aproximações mais ou menos exactas na solução de uma equação única.

A equação de *rendering* descreve o transporte de radiância através de um meio não-participativo num ambiente tridimensional (3D).

A equação de *rendering* apresenta-se da seguinte forma:

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[ e(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \int_S \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') I(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' \right]. \quad (1)$$

onde:

$I(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  está relacionado com a intensidade da luz passando do ponto  $\mathbf{x}'$  para o ponto  $\mathbf{x}$

$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  é um termo “geométrico”

$e(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  está relacionado com a intensidade da luz emitida do ponto  $\mathbf{x}'$  para o ponto  $\mathbf{x}$

$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  está relacionado com a intensidade da luz passando do ponto  $\mathbf{x}''$  para o ponto  $\mathbf{x}$  por um retalho de superfície em  $\mathbf{x}'$

A equação define que a intensidade de transporte de luz de um ponto de uma superfície para outro simplesmente é a soma da luz emitida e o total de intensidade de luz que se espalha para  $\mathbf{x}$  de todos os outros pontos de superfície.

No mesmo artigo, apresentou também uma solução que resolvia de forma completa essa equação integral com base no método de Monte Carlo. O seu algoritmo generalizava as ideias do algoritmo de traçado estocástico de raios de R. Cook e Carpenter [3], sendo capaz de levar em consideração as inter-reflexões entre superfícies.

Embora capaz de calcular a troca de energia entre superfícies com características de reflexão arbitrárias, a principal desvantagem do algoritmo era exigir que fosse gerado um número muito grande de amostras para se produzir uma imagem com pouco ruído.

Em 1993 S.N.Pattanaik e S.P.Mudur [4] apresentaram a equação potencial que juntamente com a equação de *rendering* forma um sistema de junção de equações e proporciona uma framework matemática para todas as aproximações conhecidas de computação de iluminação baseadas em óptica geométrica.

S. N. Pattanaik e S. P. Mudur afirmam que a iluminação de qualquer ponto de uma superfície num ambiente complexo 3D é devida à emissão de luz daquele ponto (se existir) e/ou devido à reflexão daquele ponto de luz recebida de todas as direcções hemisféricas em redor daquele ponto [4].

Em objectos sólidos opacos, por causa das propriedades ópticas de superfícies, principalmente reflexão, a luz emitida de qualquer superfície em qualquer direcção pode iluminar muitas outras superfícies de um ambiente. Este fenómeno pode ser capturado pela noção de um potencial associada a todo o ponto e direcção no ambiente.

A equação potencial proporciona uma expressão para a capacidade potencial,  $\mathcal{W}$ , de qualquer,  $(\mathbf{x}, \Theta_x)$  para a iluminação de  $\mathcal{S}$ , uma serie de pontos e direcções ao redor desses pontos.

Emissão de um ponto  $x$  ao longo de  $\Theta_x$  pode directamente e/ou indirectamente iluminar  $\mathcal{S}$ . A radiação emitida a partir de  $(\mathbf{x}, \Theta_x)$  pode directamente ser tida em conta para a iluminação da serie  $\mathcal{S}$  se  $(\mathbf{x}, \Theta_x)$  pertence à serie. Assim para representar o componente directo S. N. Pattanaik e S.P.Mudur utilizaram uma função  $g$  definida sobre todos os pontos de superfície e todas as direcções em redor desses pontos em que  $g(\mathbf{x}, \Theta_x)$  é 1 se  $(\mathbf{x}, \Theta_x) \in \mathcal{S}$ , e 0 caso contrario [4].

A quantidade de luz emitida de  $(\mathbf{x}, \Theta_x)$  responsável pelo componente de saída em  $\mathcal{S}$  devido a uma ou mais reflexões pode ser exprimida da seguinte maneira. A emissão de qualquer  $(\mathbf{x}, \Theta_x)$  atingirá o ponto de superfície  $y$  mais próximo e depois possivelmente será reflectido. A fracção do fluxo incidente sendo reflectido em qualquer das direcções hemisféricas  $\Theta_y$  à volta de  $y$  é:

$$f_r(y, \Theta_y, \Theta_x) \cos \theta_y d\omega_y \quad (2)$$

Depois esta fracção vezes o potencial do ponto  $y$  ao longo de  $\Theta_y$  integrado no hemisfério de saída à volta de  $y$ , ou seja, o componente indirecto é representado da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega_y} f_r(y, \Theta_y, \Theta_x) W(y, \Theta_y) \cos \theta_y d\omega_y \quad (3)$$

Assim, a expressão completa da função potencial é representada da seguinte maneira:

$$W(x, \Theta_x) = g(x, \Theta_x) + \int_{\Omega_y} f_r(y, \Theta_y, \Theta_x) W(y, \Theta_y) \cos \theta_y d\omega_y \quad (4)$$

## 2. Métodos baseados em Fótons

Existem diversos métodos de iluminação global baseados em fótons. Estes métodos, de uma maneira geral produzem imagens com elevado grau de realismo, no entanto, requerem um esforço computacional elevado.

### 2.1 Photon tracing

*Photon tracing* é o inverso do método *visibility ray-tracing*<sup>1</sup> e utiliza suposições semelhantes e simplificadas [5].

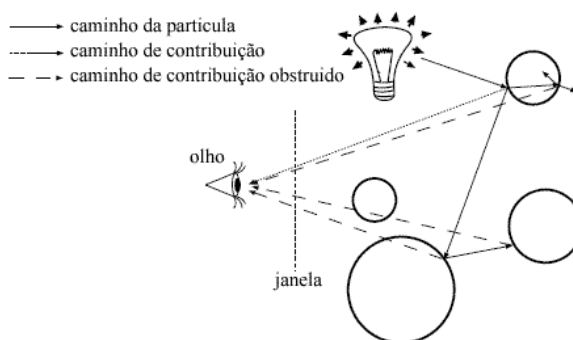


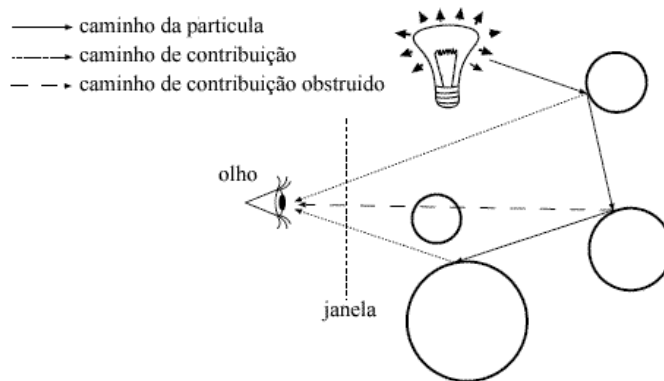
Fig. 1. Método photon tracing

Também deixa de localizar ao bater uma superfície que não tem reflexão coerente ou refração. Em *photon tracing* os raios são emitidos das fontes de luz, e a cada embate a superfície é examinada para saber se tem reflexão/refração ideal, e reflexão/refração incoerente. Nas direcções de reflexão ideal ou refração, o traçado é continuado começando raios filhos novos (Figura 1). O efeito das interacções incoerentes é armazenado num mapa ou é projectado para o olho traçando-o para a posição da câmara.

### 2.2 Light Tracing

O método *light tracing* [6], [7] baseia-se na simulação do modelo de fótons de luz.

<sup>1</sup> Visibility Ray Tracing é um método de iluminação global que apenas modela reflexões ideais e transmissões (também designadas como *componentes coerentes*) que seguem leis de geometria óptica como a lei de reflexão e a lei de Snellius-Descartes de refração mas não tem em conta a reflexão especular ou refração múltipla e difusa ou incoerente.



**Fig. 2.** Método light tracing

Estes fótons são propagados à medida que são gerados nas fontes de luz. Neste método os fótons executam um passeio fortuito pela cena que começa nas fontes de luz. Sempre que embatem numa superfície, um raio é traçado desde o ponto de intersecção ao olho (figura 2) e a contribuição é acrescentada ao pixel seleccionado (se existente). O algoritmo do *light tracing* é um algoritmo probabilístico “*shooting*”. O *sampling* baseia-se nas funções bidireccionais de distribuição de reflexão (BRDF<sup>2</sup>) nas superfícies reflectidas, e numa função de densidade de probabilidade adaptativa (PDF) nas fontes de luz.

O método *light tracing* é a implementação directa da quadratura Monte-Carlo da formulação multi-dimensional da equação potencial. Quando a próxima direcção é determinada, *BRDF based importance sampling* pode ser aplicado e combinado com Roleta-russa. Escolhe uma direcção fortuita de acordo com a densidade  $t_i$  que é aproximadamente proporcional a  $w_i$  (importance sampling). O passeio é continuado com uma probabilidade  $a_i$  igual à aproximação do albedo (roleta russa). O valor medido de um único passo do caminho é

$$P = \frac{L^e \cos \theta}{N \cdot p^e} \cdot \frac{w_1}{t_1 \cdot a_1} \cdot \frac{w_2}{t_2 \cdot a_2} \cdot \dots \cdot w(eye) \cdot g, \quad (5)$$

se este ponto é visível ao pixel e caso contrário zero. Aqui  $L^e$  é a emissão do ponto de partida,  $\theta$  é o angulo entre a superfície normal da fonte de luz e a primeira direcção,  $p^e$  é a probabilidade de seleccionar este ponto de fonte de luz e direcção inicial,

<sup>2</sup> A Bidirection Reflectance Distribution Function, BRDF foi introduzida por Nicodemus et al. Como uma ferramenta para descrever a reflexão de luz numa superfície. A função BRDF é uma aproximação simplificada da função BSSRDF. A BRDF assume que a luz que atinge uma superfície num local dessa superfície, é reflectida nesse mesmo local e descreve o modelo de iluminação local.

$w(\text{eye})$  é o coseno avaliado de BRDF a um dado ponto desde a última direcção para o olho, e  $g$  é o parâmetro de câmara dependente da superfície. Se o *sampling* BRDF ideal for utilizado, ou seja, se  $w_i$  for proporcional a  $t_i$  e ambos  $w_i/t_i$  e  $\alpha_i$  forem iguais ao *albedo*, e a *sampling* da fonte de luz ideal for utilizada, ou seja, se  $p^e$  for proporcional a  $L^e \cos\Theta$ , assim,  $\cos$  de  $L^e \cos\Theta/N \cdot p^e = \Phi/N$ , a estimativa seguinte pode ser obtida:

$$P = \frac{\Phi}{N} \cdot w(\text{eye}) \cdot g. \quad (6)$$

Esta estimativa tem variação alta se a câmara for frequentemente escondida dado que se o ponto não é visível da câmara, a contribuição é zero.

Este algoritmo também aplica BRDF *sampling* para todos menos os últimos passos. A direcção do último raio de visibilidade pode estar longe da direcção preferida pelo BRDF. Isto degrada o desempenho de *sampling* de importância se a superfície visível é muito brilhante. Assim, espelhos visíveis ou refractares (vidro) coloca dificuldades aos algoritmos *shooting*.

As vantagens do *light tracing* [7] são as seguintes:

- Todos os tipos de transporte de luz são tratados de uma maneira uniforme.
- Não é necessária nenhuma malha.
- Todos os percursos da luz são gerados correctamente.
- As partículas são disparadas em direcções com alto potencial de capacidade.

As desvantagens são:

- O algoritmo é dependente da vista.
- A qualidade das imagens depende fortemente do número de partículas que são disparadas.
- Detalhes de alta frequência tais como reflexões, refacções ou causticos<sup>3</sup> são difíceis de ser renderizados correctamente.

### 2.3 Photon-mapping

O algoritmo *photon mapping* proposto por Jensen é muito utilizado em computação de iluminação global e bastante popular no meio académico e na industria. Este método funciona bem mesmo em ambientes complexos e todas as direcções de luz podem ser facilmente simuladas (figura 3).

---

<sup>3</sup> Um cáustico é um padrão de luz que é focalizado numa superfície depois de ter tido o caminho original de raios de luz alterado por uma superfície intermediária..



**Fig. 3.** Exemplo de um ambiente complexo com base em photon-mapping

O método *photon-mapping* [8], [9] constitui uma aproximação estocástica à solução da equação de *rendering*, que permite calcular cáusticos, interreflexões difusas, meios participativos (ex.: fumo, nevoeiro), etc.

Por exemplo, como os raios de luz atravessam uma taça de vinho (Figura 4) em cima de uma mesa e o líquido que contém, eles são refractados e focalizados na mesa. O vinho também muda o padrão e cor da luz.



**Fig. 4.** Exemplo de cáusticos

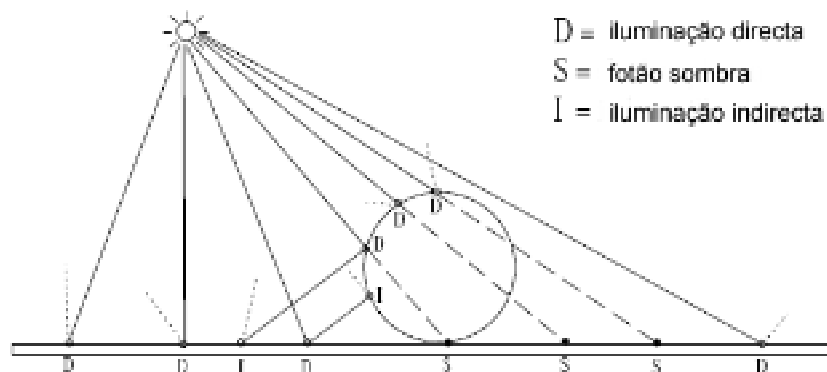
Este fenómeno também é frequente em superfícies metálicas curvas.

Particularmente, este método é mais eficiente que todas as outras técnicas existentes no *rendering* de alta qualidade de efeitos cáusticos.

Um *photon map* é uma colecção de fotões que atingem o término dos caminhos gerados na fase do algoritmo de *shooting*. O *photon map* é organizado numa *KD-tree* para efectuar uma recuperação eficiente. O embate dos fotões é armazenado com o poder de cada fotão em comprimentos de onda diferentes, posição, direcção de chegada e com a superfície normal.

O *Photon mapping* [10], [11] convencional pode ser visto como um processo constituído por duas etapas:

- Construção dos *photon maps*: Nesta etapa, os *photon maps* são construídos com base na emissão de um grande número de fótons (pacotes de energia) desde as fontes de luz até cada superfície da cena.. Cada fóton é localizado na cena através da utilização de um método semelhante ao *path tracing*. Sempre que um fóton atinge uma superfície é armazenado dentro do *photon map* e um método roleta russa é utilizado para determinar se o fóton é absorvido ou reflectido. A direcção nova de um fóton reflectido é calculada utilizando o BRDF da superfície.



**Fig. 5.** Os fótons no photon map global são classificados para otimizar o rendering de sombras

São também utilizados fótons de sombra, traçando raios com origem na fonte luminosa ao longo de toda a cena. No primeiro ponto de intersecção um fóton normal é armazenado e nos pontos de intersecção seguintes são armazenados fótons de sombra. Estes fótons de sombra são utilizados durante a fase de *rendering* para reduzir o número de raios de sombra (Figura 5).

Existem dois *photon maps* separados, um *caustics photon map* para armazenar fótons relativos a *cáusticos* e um *global photon map* que é utilizado como uma aproximação do fluxo de luz na cena e é criado pela emissão de fótons para todos os objectos. Esta separação, contribui para melhorar a velocidade, reduzir a necessidade de memória e aumentar a exactidão o método.

Os fótons são armazenados numa *KD-tree* equilibrada. Esta estrutura de dados permite um *rendering* mais eficiente e reduz a necessidade de memória para o embate de cada fóton, permitindo representar cada fóton em apenas 20 bytes.

- *Photon rendering*: Etapa em que é feito o *render* da imagem final, sendo a luminosidade de cada pixel calculada com base na media de um conjunto de amostras. Cada amostra consiste em traçar um raio desde o olho até cada pixel na cena. A luminosidade devolvida por cada raio é calculada na primeira superfície interceptada pelo raio e é igual à luminosidade de superfície,  $L_s(x, \Psi_r)$ , deixando o ponto de intersecção  $x$ , na direcção  $\Psi_r$  do raio.  $L_s(x, \Psi_r)$  é calculada através da seguinte equação de *rendering*:



$$L_s(\mathbf{x}, \Psi_r) = L_e(\mathbf{x}, \Psi_r) + \int_{\Omega} f_r(\mathbf{x}, \Psi_i; \Psi_r) L_i(\mathbf{x}, \Psi_i) \cos \theta_i d\omega_i \quad (7)$$

Onde  $L_e$  é a luminosidade emitida pela superfície,  $L_i$  é a luminosidade de entrada na direcção  $\Psi_i$ ,  $f_r$  é o BRDF e  $\Omega$  é a esfera das direcções de entrada.  $L_e$  é considerada directamente a partir da definição de superfície, não necessitando de outros cálculos. O valor do integral  $L_r$ , depende dos valores de luminosidade do resto da cena e pode ser resolvido directamente utilizando técnicas de *Monte Carlo* como o *path tracing*.

A equação de retribuição (7) pode ser dividido num conjunto de vários componentes. Sendo  $L_r$  expresso como:

$$\begin{aligned} L_r = & \int_{\Omega} f_r L_{i,l} \cos \theta_i d\omega_i + \\ & \int_{\Omega} f_{r,s} (L_{i,c} + L_{i,d}) \cos \theta_i d\omega_i + \\ & \int_{\Omega} f_{r,d} L_{i,c} \cos \theta_i d\omega_i + \\ & \int_{\Omega} f_{r,d} L_{i,d} \cos \theta_i d\omega_i \end{aligned} \quad (8)$$

$$f_r = f_{r,s} + f_{r,d} \quad \text{and} \quad L_i = L_{i,l} + L_{i,c} + L_{i,d}$$

Nesta equação (8), a luminosidade de entrada foi dividida em contribuições das fontes luminosas,  $L_{i,l}$ , contribuições das fontes luminosas por reflexão de especular (cáusticos),  $L_{i,c}$  e iluminação indirecta suave,  $L_{i,d}$  (luz que foi difusamente reflectida pelo menos uma vez. O BRDF encontra-se separado numa parte de difusa,  $f_{r,d}$ , e numa parte especular  $f_{r,s}$ .

## 2.4 Ray Maps

Havran, Bittner, Herzog e Seidel apresentaram uma estrutura de dados mais eficiente para representar o transporte de luz, chamada *ray maps* [12]. *Ray maps* consiste basicamente numa eficiente estrutura de indexação baseada em *KD-tree*: O espaço é subdividido por *KD-voxels* que guardam referencias de todos os segmentos de raio que interceptam um *voxel*. De modo semelhante ao *photon mapping* convencional, os raios vizinhos são determinados pela expansão de uma esfera à volta do ponto onde a radiação tem de ser calculada. Deste modo, todos os raios referenciados por *voxels* que interceptam a esfera são ordenados relativamente à distância deles para aquele

ponto. Para calcular esta distância várias métricas foram propostas, as quais significativamente influenciam a estimativa de radiação.

Embora os *ray maps* sejam claramente superiores para a *ray cache* Havran et al. reportaram tempos de *rendering* até cinco vezes superiores ao convencional *photon mapping*. Apesar de algumas estratégias reduzirem a utilização de memória e tempo de computação os *ray maps* ainda podem ser muito custosos:

- *Ray maps* têm a necessidade de armazenar referências a raios em todos os lugares ao longo de um raio, potencialmente até mesmo em espaço vazio. Isto aumenta as exigências de memória dado que são armazenadas muitas referências que nunca serão utilizadas para uma estimativa de radiação.
- Se o *lookup radius*  $R$  é muito maior que a extensão de um *KD-Voxel* muitas referências para um único raio podem ser encontradas num *lookup* vizinho mais próximo. Esta situação muito comum conduz um custo indirecto significaste.

Além disso a resolução de *ray maps* é completamente determinada pela densidade de raio (limitada pela definição de algum utilizador de maximo de *KD-tree* de profundidade definida). Assim não há nenhuma possibilidade para adaptar localmente a sua resolução de acordo com a geometria de uma cena.

## 2.5 Efficient Ray Based Global Illumination Using Photon Maps

Arno Zinke e Andreas Weber introduziram uma técnica baseada em raios para aproximar a iluminação global para cenas complexas [13]. Estes autores consideram os seus desenvolvimentos simples, no entanto, constituem uma alternativa mais eficiente do que anteriores métodos tais como o *ray mapping*, quando a exactidão perfeita no *rendering* de cenas complexas de imagens tridimensionais não é necessária. Esta técnica combina a simplicidade e a eficiência do *photon mapping* com as técnicas baseadas em raios. Referências a raios deveriam ser adaptativamente distribuídos com respeito para com a geometria na cena evitando referencias desnecessárias em espaço vazio e permitindo uma definição pelo utilizador de um intercâmbio entre precisão e eficiência.

Em contraste com *photon mapping* convencional, onde a estimação de radiação só tem em conta fotões em superfícies, a estimação de densidade baseada em raios necessita de procurar os  $n$  segmentos de raio mais próximos com respeito a um determinada posição no espaço. Para eficazmente encontrar os raios próximos, um único segmento de raio é representado por vários fotões num *photon map* (Figura 6).

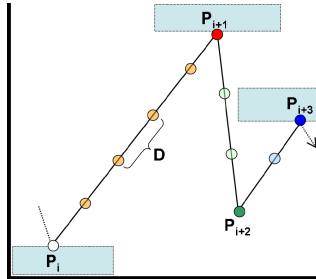


Fig. 6. Segmentos de raio são representados por vários fótons no photon map

Se um destes fótons é encontrado na procura da vizinhança mais próxima, o caminho de luz está a interceptar a esfera (Figura 7).

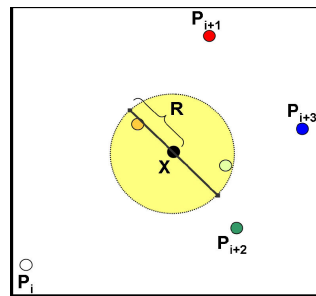


Fig. 7. Identificação de segmentos de raio vizinhos em redor de um ponto X

A principal vantagem de armazenar fótons referentes a um raio (em relação ao armazenamento de referências para raios em *ray maps*) é a de que as densidades dos fótons podem ser adaptadas a uma cena, considerando que para *ray mapping* a resolução dos *ray maps* é determinada pela densidade de raio local. Por exemplo nenhuma referência precisa de ser armazenado em espaço vazio. É de notar que as referências de fótons utilizam muito menos memória que os fótons convencionais (nesta implementação 8 bytes por fóton). Porém, para aumentar a eficiência, um fóton é apenas armazenado no *map* se for um contributo potencial numa estimativa de radiação. Isto é alcançado pela utilização de uma *grid* binária para identificar regiões vazias. Se um *voxel* desta *grid* é interceptado por um objecto este é marcado como ocupado ou vazio caso contrário. A resolução espacial de um *voxel* é escolhida para ser igual ao *lookup radius* R máximo. As referências de fótons são apenas armazenadas no *map*, se o *voxel* que inclui o fóton está ocupado ou tem pelo menos um *voxel* vazio na vizinhança.

### 3. Conclusão

Os métodos de iluminação global baseados em fótons têm tido uma evolução significativa ao longo do tempo em termos de produção de imagens tridimensionais

de cenas complexas cada vez mais realistas. No entanto ainda se verifica a existência de algumas limitações em termos de capacidade de processamento e de memória que estes métodos necessitam para ser possível correrem inteiramente em GPUs. Desenvolvimentos como os de Arno Zinke e Andreas Weber que procuram otimizar e aumentar a eficiência ou eficácia do *rendering* de imagens realistas em detrimento da perda de alguma exactidão constituem um dos caminhos para desenvolvimentos futuros nesta área. Por outro lado, é previsível que à medida que os GPUs de nova geração forem surgindo, essa necessidade de optimização se torne cada vez menos crítica e proporcione uma maior abertura para o desenvolvimento de algoritmos cada vez mais aperfeiçoados e de representação cada vez mais realista de imagens tridimensionais complexas.

## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. António Augusto de Sousa e ao Prof. Dr. Fernando Nunes Ferreira pela discussão elucidativa para o desenvolvimento deste trabalho.

## Referencias

1. Bekaert, P., *Hierarchical and Stochastic Algorithms for Radiosity*. 99, Katholieke Universiteit Leuven.
2. Kajiya, J.T. *The Rendering Equation*. in *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH '86 Proceedings)*. 86.
3. R. Cook, T.P. and L. Carpenter, *Distributed ray tracing*, in *Computer Graphics (SIGGRAPH '84 Proceedings)*. 84. p. 137-145.
4. Pattanaik, S.N. and S.P. Mudur, *Efficient Potential Equation Solutions for Global Illumination Computation*, in *Pergamon Press*. 93. p. 1-19.
5. László, S.-K., *Monte-Carlo Methods in Global Illumination*. 99/00, Vienna: Institute of Computer Graphics - Vienna University of Technology.
6. Dutre, P., E. Lafortune, and Y.D. Willems, *Monte Carlo light tracing with direct computation of pixel intensities*, in *Compugraphics '93*. 93, Alvor. p. 128-137.
7. Dutré, P. and Y.D. Willems, *Importance-driven Monte Carlo Light Tracing*, in *5th Eurographics Workshop on Rendering, Darmstadt, Germany 94*, Department of Computer Science - Katholieke Universiteit Leuven.
8. Jensen, H.W., *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping*. 01, Natick, Massachusetts: A K Peters.
9. Jensen, H.W. and N.J. Christensen, *Photon Maps in Bidirectional Monte-Carlo Ray-Tracing of Complex Objects*. *Computers & Graphics*, 95. 19(2): p. 215-224.
10. Jensen, H.W., *Global Illumination using Photon Maps*. 96, Department of Graphical Communication - The Technical University of Denmark.
11. Jensen, H.W. and P. Christensen, *High Quality Rendering using Ray Tracing and Photon Mapping*, S.D. University of California, Editor. 07, Pixar Animation Studios.
12. Havran, V., et al., *Ray maps for global illumination*, in *Eurographics Symposium on Rendering*. 05. p. 43-54.
13. Zinke, A. and A. Weber, *Efficient Ray Based Global Illumination Using Photon Maps*, I.f. Informatik, Editor. 07.