Introdução à classe de problemas **NP- Completos**

R. Rossetti, A.P. Rocha, A. Pereira, P.B. Silva, T. Fernandes

FEUP, MIEIC, CAL, 2010/2011

Introdução

- Considerações Práticas
  - Em alguns casos práticos, alguns algoritmos podem resolver problemas simples em tempo razoável (e.g. $n \leq 20$); mas quando se trata de *inputs* maiores (e.g. $n \geq 100$) o desempenho degrada consideravelmente
  - Soluções desse género podem estar a executar em tempo exponencial, da ordem de $n^{\sqrt{n}}$, 2^n, $2^{(2^n)}$, $n!$, ou mesmo piores do que isso
  - Para algumas classes de problemas, é difícil determinar se há algum paradigma ou técnica que leve à solução do mesmo, ou se há formas de provar que o problema é intrinsecamente difícil, não sendo possível encontrar uma solução algorítmica cujo desempenho seja sub-exponencial
  - Para alguns problemas difíceis, é possível afirmar que, se um desses problemas se pode resolver em tempo polinomial, então todos podem ser resolvidos em tempo polinomial!

Tempo Polinomial como referência

- Tempo polinomial é a referência que define e separa a classe de problemas que **podem ser resolvidos eficientemente**. Assim, se um problema pode ser resolvido eficientemente, então significa que o seu tempo de execução é polinomial.
- Esta avaliação é geralmente medida em termos do tempo de execução do algoritmo, usando a complexidade no pior caso, como uma função de *n*, que é o tamanho do *input* do problema
- Um algoritmo de tempo polinomial tem tempo de execução da ordem de $O(n^k)$, onde *k* é uma constante independente de *n*
- Um problema é dito ser "**resolúvel em tempo polinomial**" se houver um algoritmo de tempo polinomial que o resolva
- Algumas funções parecem não ser polinomiais, mas podem ser tratadas como tal: e.g. $O(n \log n)$ tem delimitação superior da ordem de $O(n^2)$
- Algumas funções parecem ser polinomiais, mas podem não o ser na verdade: e.g. $O(n^k)$, se *k* variar em função de *n*, tamanho do *input*.

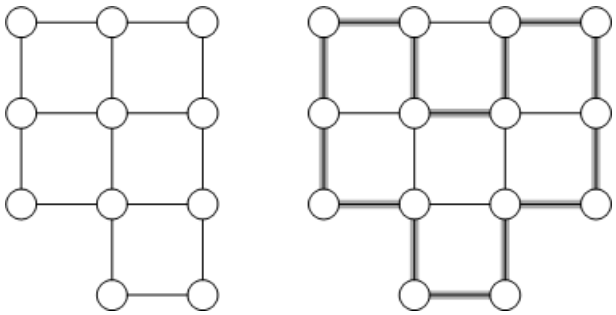
Problemas de Decisão

- Reformulação de problemas de optimização
  - Muitos dos problemas práticos que se pretende resolver são problemas de optimização (maximizar ou minimizar alguma métrica)
  - Um problema é dito ser um "**problema de decisão**" se o seu *output* ou resposta deve ser um simples "SIM" ou "NÃO" (ou derivativos do tipo "V/F", "0/1", "aceitar/rejeitar", etc.)
  - Muitos problemas de optimização podem ser expressos em termos de problemas de decisão.

    Por exemplo: o problema "qual o menor número de cores que se pode utilizar para colorir um grafo?" pode ser expresso como "Dado um grafo *G* e um inteiro *k*, é possível colori *G* com *k* cores?"
- A **classe de problemas P** é definida por todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial!

Verificação do Tempo Polinomial

- *Undirected Hamiltonian cycle problem* (UHC)
  - Dado um grafo *G*, "é possível determinar se G possui um ciclo que visita todo vértice exactamente uma vez?"



Verificação do Tempo Polinomial

- Caso se conheça um ciclo (e.g. $\langle v_3, v_7, v_1, \ldots, v_{13} \rangle$), é fácil verificá-lo, por inspecção. Ainda ñ sendo possível implementar algoritmo p/resolver o problema, seria fácil "verificar" se *G* é ou não "Hamiltoniano"
- O ciclo neste caso é dito ser um "**certificado**"; trata-se de uma informação que permite verificar se uma dada "string" está numa "linguagem" (em problemas de reconhecimento de linguagem)
- Caso seja possível verificar a precisão de um certificado para um problema em tempo polinomial, diz-se que o problema é "verificável em tempo polinomial"
- Nem todas as "linguagens" gozam da propriedade de serem facilmente verificáveis! Por exemplo: seja o problema definir se um grafo *G* tem exactamente um ciclo de Hamilton. É fácil verificar se existe pelo menos um ciclo, mas não é simples demonstrar que não há outro!

- A **classe de problemas NP** é definida por todos os problemas que podem ser verificados por um algoritmo de *T* polinomial

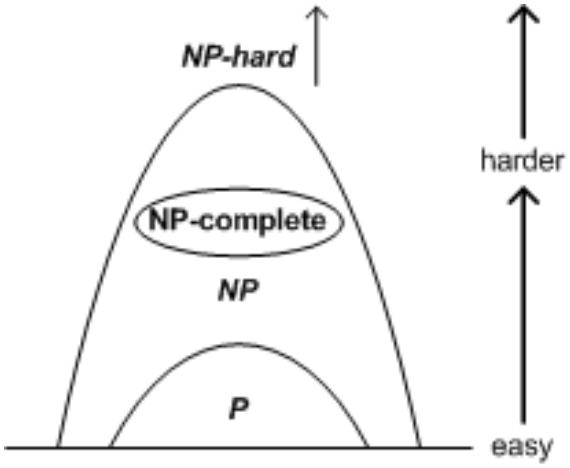
Verificação do Tempo Polinomial

- **Execução** de tempo polinomial é diferente de **verificação** de tempo polinomial!
  - O circuito de Hamilton é verificável em tempo polinomial, mas acredita-se não haver uma solução executável em tempo polinomial que encontre um circuito de Hamilton
- Por que NP e não VP?
  - O termo NP vem de "*nondeterministic polynomial time*," relacionado com um programa a executar num "computador não determinístico" capaz de realizar palpites; basicamente, tal arquitectura seria capaz de não deterministicamente conjecturar o valor do certificado e verificar, em tempo polinomial, se uma *string* está na linguagem ou não.

Classes P e NP

- $P \subseteq NP$.
  - Assim, se um problema é resolúvel em tempo polinomial, então pode-se certamente verificar se uma solução é correcta em tempo polinomial
- Não se sabe certamente se $P = NP$.
  - Ou seja, poder verificar se uma solução é correcta em tempo polinomial não garante ou ajuda encontrar um algoritmo que resolva o problema em tempo polinomial
  - $P \neq NP$? Muitos autores acreditam que sim, mas não há provas!
- A **classe de problemas NP-Completos** é a classe dos problemas mais difíceis de resolver em toda a classe NP.
- Pode haver problemas ainda mais difíceis de resolver que não estejam enquadrados na classe de problemas NP; neste caso, são chamados **problemas NP-difíceis** (***NP-hard***)

Classes P e NP



Redução de Problemas NP

- Suponha que há dois problemas, *A* e *B*. Sabe-se que *A* é impossível de ser resolvido em tempo polinomial
- Pretende-se provar que *B* não pode ser resolvido em tempo polinomial. Como provar ou demonstrar que:

$$(A \notin \mathbf{P}) \Rightarrow (B \notin \mathbf{P})$$

- Pode-se tentar provar o contraposto:

$$(B \in \mathbf{P}) \Rightarrow (A \in \mathbf{P})$$

  - Em outras palavras, para demonstrar que *B* não é resolúvel em tempo polinomial, supõem-se que há um algoritmo que resolve *B* em tempo polinomial, e então deriva-se uma contradição pela demonstração de que *A* pode ser resolvido em tempo polinomial

Redução de Problemas NP

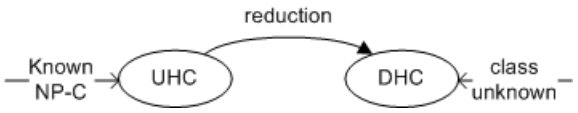
- Premissa
  - Suponha que há uma subrotina que pode resolver qualquer instância do problema *B* em tempo polinomial
  - Tenta-se demonstrar que a mesma subrotina pode ser utilizada para resolver *A* em tempo polinomial
  - Então tem-se "reduzido o problema *A* no problema *B*"!
  - Como se sabe que *A* não se pode resolver em tempo polinomial, então está-se basicamente a tentar provar que a subrotina não pode existir, implicando que *B* não pode ser resolvido em tempo polinomial

Redução de Problemas NP

- Exemplo
  - Sabe-se que o problema UHC é um problema NP-completo! Não se conhece algoritmo de tempo polinomial que o resolva.
  - Problema: suponha um director técnico pede a um dos seus engenheiros para encontrar uma solução polinomial para um problema diferente, nomeadamente o problema de encontrar um ciclo de Hamilton num grafo dirigido (DHC).
  - Depois de pensar numa solução, por algum tempo, o engenheiro convence-se de que não se trata de uma solicitação sensata. Será que considerar arestas direccionais tornaria o problema de alguma forma mais fácil? Apesar de ambos (director e eng.) concordarem que UHC é NP-completo, o director está convencido de que DHC é viável e fácil. Como convencê-lo do contrário?

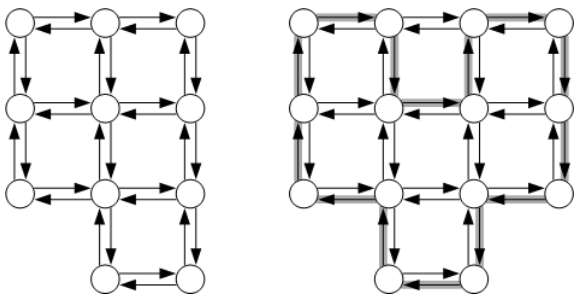
Redução de Problemas NP

- Solução
  - Pode-se tentar convencer o director de que "se houvesse uma solução eficiente para DHC, então se demonstraria que seria então possível resolver UHC em tempo polinomial."
  - Em particular, usar-se-ia a mesma subrotina usada no DHC para resolver o UHC. Uma vez que ambos conhecem que UHC não é resolúvel, então tal rotina não pode existir. Portanto, DHC também não é resolúvel em tempo polinomial!



Redução de Problemas NP

- Solução
  - Dado um grafo *G*, criar um grafo dirigido *G'* pela substituição de cada aresta {*u*, *v*} por duas arestas dirigidas: (*u*, *v*) e (*v*, *u*)
  - Cada caminho simples em *G* é um caminho simples em *G'*, e vice-versa. Portanto, *G* terá um ciclo de Hamilton se, e somente se, *G'* também o tiver!



Redução de Problemas NP

- Solução
  - Redução UHC → DHC

```
bool UHC (graph G) {
   create digraph G' with the same number of vertices as G
   foreach edge (u, v) in G
      Add edges (u, v) and (v, u) in G'
   return DHC (graph G')
}
```

  - Note-se que nenhum dos problemas foi efectivamente resolvido. Apenas demonstrou-se como converter uma solução para o DHC numa solução para o UHC. Este procedimento é chamado "**redução**" e é crucial para a teoria dos problemas NP-completos.

Redução de Problemas NP

- Definição
  - Dados dois problemas, ***A*** e ***B***, diz-se que ***A*** é polinomialmente redutível a ***B*** se, dada uma subrotina de tempo polinomial para ***B***, pode-se utilizá-la para resolver ***A*** em tempo polinomial. Quando tal se verifica, expressa-se por

$$A \leq_P B$$

  - **Lema**: Se $A \leq_P B$ e $B \in P$ então $A \in P$
  - **Lema**: Se $A \leq_P B$ e $A \notin P$ então $B \notin P$
  - **Lema**: Se $A \leq_P B$ e $B \leq_P C$ então $A \leq_P C$ (transitividade)

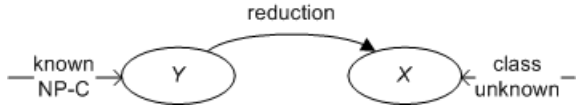
Redução de Problemas NP

- Definição +formal da classe dos problemas NP- completos
  - Um problema de decisão $B \in$ NP é NP-completo se
    $A \leq_P B \mid \forall A \in NP$
  - Assim, se *B* pode ser resolvido em tempo polinomial, então qualquer outro problema *A* em NP é resolúvel em tempo polinomial
  - **Lema**: *B* é NP-completo se

    (1) $B \in NP$, e
    (2) $A \leq_P B$ para algum problema *A*, se *A* é *NP-Completo*

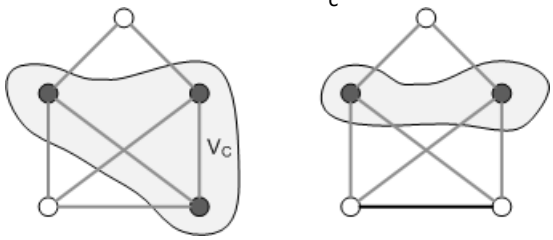
Redução de Problemas NP

- Procedimento:
  Dado um problema *X*, prove que o mesmo é pertencente à classe dos problemas *NP*-completos.
  - Provar que *X* está em *NP*
  - Seleccionar um problema *Y* que se sabe ser *NP*-completo
  - Definir uma redução de tempo polinomial de *Y* para *X*
  - Provar que, dada uma instância de *Y*, *Y* tem uma solução se, e se somente, *X* tem uma solução



Vertex Cover

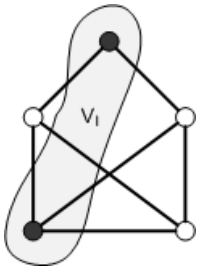
- Uma cobertura de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $V_C \subseteq V$, tal que toda aresta $(a, b) \in E$ é incidente em pelo menos um vértice $u \in V_C$.



  - Vértices em V_C "cobrem" todas as arestas em G.
- Reformulação de VC como um problema de decisão
  - O grafo G tem uma cobertura de vértices de tamanho k?

Independent Set

- Um conjunto independente de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $V_I \subseteq V$, tal que não há dois vértices em V_I que partilham uma aresta de E
  - $u, v \in V_C$ não podem ser vizinhos em G.



- Reformulação de VI como um problema de decisão
  - O grafo G tem um conjunto independente de tamanho k?

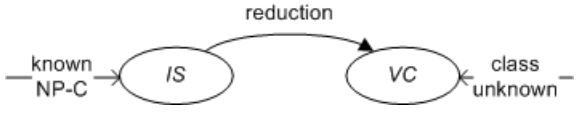
Vertex Cover é *NP*-completo?

- Dado que o problema de decisão de Conjunto Independente (IS) é NP-completo, provar que o problema de Cobertura de Vértices também é NP-completo

- Solução: (1) Provar que VC pertence à classe NP.
  - Dado V_C, uma cobertura de vértices de $G = (V, E)$, $|V_C| = k$
    Pode-se verificar em $O(|E|+|V|)$ que V_C é uma cobertura de vértices de G. Como?
    - Para cada vértice $\in V_C$, remover todas as arestas incidentes
    - Verificar se todas as arestas foram removidas de G.
  - Então, *Vertex Cover* $\in$ *NP*!

Vertex Cover é *NP*-completo?

- (2) Seleccionar um problema que se conhece ser NP-completo
  - O problema do Conjunto Independente (IS), em grafos, é reconhecidamente um problema *NP*-completo!
  - Usar IS para provar que VC é *NP*-completo



Vertex Cover é *NP*-completo?

- (3) Definir uma redução de tempo polinomial de IS para VC:
  - Dada uma instância geral de IS: G' = (V', E'), k'
  - Construir uma instância específica de VC: G = (V, E), k
    - $V = V'$
    - $E = E'$
    - *($G = G'$)*
    - $k = |V'| - k'$
  - Esta transformação é polinomial:
    - Tempo constante para contruir G = (V, E)
    - $O(|V|)$ para contar o número de vértices
  - Provar que há um V_I ($|V_I| = k'$) para G' se, e se somente, há um V_C ($|V_C| = k$) para G.

Vertex Cover é *NP*-completo?

- (3) Definir uma redução de tempo polinomial de IS para VC:
  - Dada uma instância geral de IS: G' = (V', E'), k'
  - Construir uma instância específica de VC: G = (V, E), k
    - $V = V'$
    - $E = E'$
    - *($G = G'$)*
    - $k = |V'| - k'$
  - Esta transformação é polinomial:
    - Tempo constante para contruir G = (V, E)
    - $O(|V|)$ para contar o número de vértices
  - Provar que há um V_I ($|V_I| = k'$) para G' se, e se somente, há um V_C ($|V_C| = k$) para G.

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia Classes P e NP - CAL, 2010/11 24

Vertex Cover é *NP*-completo?

- (4) Provar que G' tem um conjunto idependente VI de tamanho k' se, e se somente, VC tem uma cobertura Vc de teamanho k.
  - Considere dois conjuntos ***I*** e ***J*** | $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = V = V'$
  - Dada qualquer aresta (*u*, *v*), um dos seguintes casos se verifica:
    1. $u, v \in I$
    2. $u \in I$ e $v \in J$
    3. $u \in J$ e $v \in I$
    4. $u, v \in J$

Vertex Cover é *NP*-completo?

- (4) Continuação…
  - Assumindo-se que I é um conjunto independente de G', então:
    - O caso 1 não pode ser (vértices em I não podem ser adjacentes
    - Nos casos 2 e 3, (u, v) tem ***exactamente um*** ponto terminal em J
    - No caso 4, (u, v) tem ***ambos*** os pontos terminais em J
    - Nos casos 2, 3 e 4, (u, v) tem ***pelo menos um*** ponto terminal em J
    - Então, vértices em J cobrem todas as arestas de G'
    - Também: |I| = |V| - |J| uma vez que $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = V = V'$
    - Assim, se I é um conjunto independente de G', então J é uma cobertura dos vértices de G' (= G)
  - Similarmente, pode-se provar que se J é uma cobertura dos vértices de G', então I é um conjunto independente de G'

Exemplos de problemas *NP*-completo

- Alguns exemplos são
  - Ciclos de Hamilton
  - Coloração em grafos
  - Cliques em grafos
  - Subgrafos e supergrafos
  - Árvores de expansão
  - Cortes e conectividade
  - Problemas de fluxo
  - Outros…

Referências e mais informação

- T. Cormen *et al.* (2009) "**Introduction to Algorithms.**" Cambridge, MA: MIT press.
- R. Johnsonbaugh & M. Schaefer (2004) "**Algorithms**." Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- C.A. Shaffer (2001) "**A Practical Introduction to Data Structures and Algorithm Analysis**." Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.