Função de autocorrelação e densidade espectral de potência

Sílvio A. Abrantes
DEEC / FEUP

Função de autocorrelação e densidade espectral de potência

- Se x(t) for um *sinal de potência determinístico* a sua função de autocorrelação é definida como

$$R_X(\tau) = \lim_{t_0 \to \infty} \frac{1}{t_0} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} x(t+\tau)x(t)\,dt$$

  - Se x(t) for um sinal periódico com período T a sua função de autocorrelação também é periódica com o mesmo período:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t+\tau)x(t)\,dt \qquad \text{t' — constante}$$

- A densidade espectral de potência de x(t) é a transformada de Fourier da função de autocorrelação:

$$S_X(f) = F\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Trata-se do *teorema de Wiener-Khintchine*.

Significa que a transformada de Fourier inversa de $S_X(f)$ é $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = F^{-1}\left[S_X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- A potência média do sinal é igual ao valor da sua função de autocorrelação na origem ($\tau = 0$):

$$P = R_X(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df\right]_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\,df$$

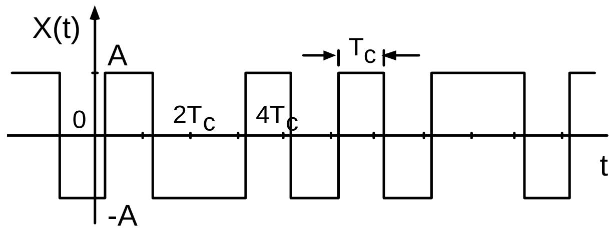
- *Sinais aleatórios estacionários em sentido lato:*

$$R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$$

  - Estacionaridade em sentido lato: valor médio é constante e função de autocorrelação só depende do intervalo de tempo τ.

Função de autocorrelação de sequência binária aleatória

- Sequência de impulsos aleatórios ±A de duração T_c

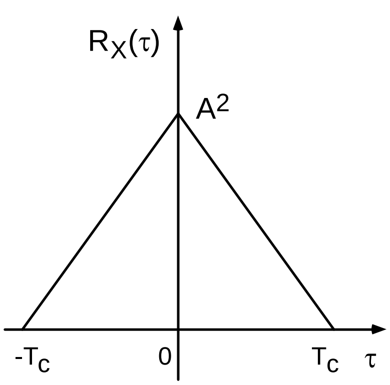


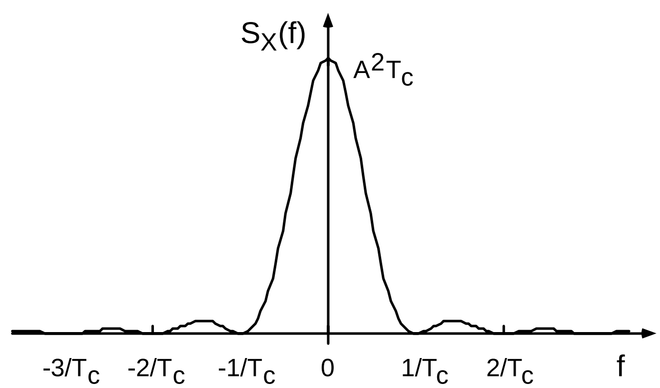
- **Função de autocorrelação**

$$R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = \begin{cases} A^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T_c}\right) & |\tau| < T_c \\ 0 & |\tau| \geq T_c \end{cases}$$

- **Densidade espectral de potência**

$$S_X(f) = A^2 T_c \operatorname{sinc}^2(fT_c)$$





A largura de banda (nulo-a-nulo) é igual a $1/T_c$ Hz.

Função de autocorrelação de sinal passa-banda

- Mistura (multiplicação) de um processo aleatório X(t) com uma sinusóide de fase aleatória:

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) \qquad \theta \text{ — v. a. uniformem. distrib. } [0, 2\pi]$$

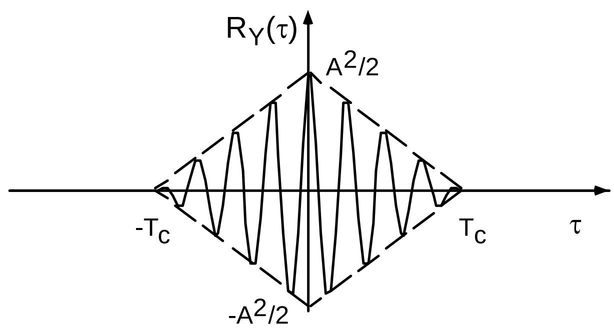
  - **Função de autocorrelação**

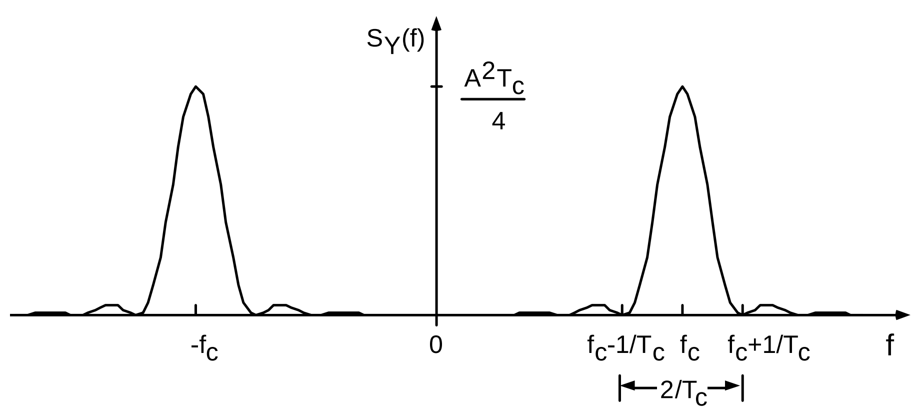
$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau)\cos 2\pi f_c \tau$$

  - **Densidade espectral de potência**

$$S_Y(f) = \frac{1}{4}\left[S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)\right]$$

Exemplo: se X(t) for a sequência aleatória ±A anterior a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência de $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)$ são (com $f_c = 4/T_c$)





Obtenção da função de autocorrelação e densidade espectral de potência do sinal passa-banda *Y(t)*

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

$X(t)$ é um processo aleatório estacionário e θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída em [0, 2π]

1. Por definição

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t+\tau)Y(t)\right] =$$

$$= E\Big[X(t+\tau)\cos\left[2\pi f_c(t+\tau)+\theta\right]X(t)\cos(2\pi f_c t+\theta)\Big]$$

2. Como $X(t)$ e θ são independentes:

$$R_Y(\tau) = E\left[X(t+\tau)X(t)\right] E\left\{\cos\left[2\pi f_c(t+\tau)+\theta\right]\cos(2\pi f_c t+\theta)\right\} =$$

$$= R_X(\tau)\, E\left[\frac{1}{2}\left\{\cos 2\pi f_c\tau + \cos\left[2\pi f_c(2t+\tau)+2\theta\right]\right\}\right]$$

3. Ora como τ é determinístico e θ está uniformemente distribuído em $[0, 2\pi]$:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2}R_X(\tau)\left\{\cos 2\pi f_c\tau + \int_0^{2\pi}\cos\left[2\pi f_c(2t+\tau)+2\theta\right]\frac{1}{2\pi}\,d\theta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}R_X(\tau)\cos 2\pi f_c\tau$$

4. A densidade espectral de potência de $Y(t)$ é a transformada de Fourier da função de autocorrelação:

$$S_Y(f) = F\left[R_Y(\tau)\right] = F\left[\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos 2\pi f_c\tau\right] =$$

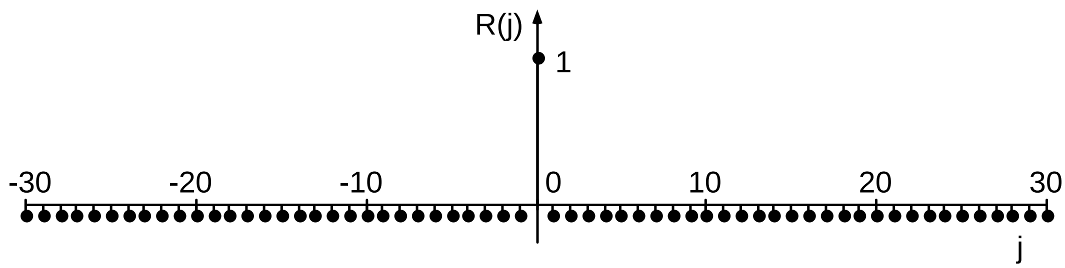
$$= \frac{1}{4}\left[S_X(f-f_c)+S_X(f+f_c)\right]$$

Funções de autocorrelação de sinais PN

- Sequência PN de período N e valores $c_i = \pm 1$

Definição: $R(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_i c_{i+j}$

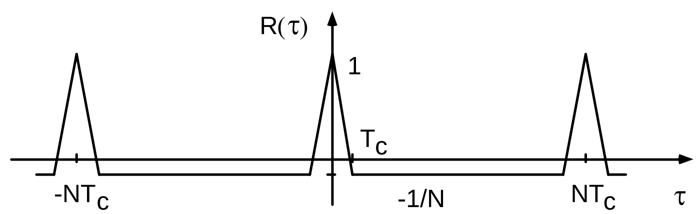
Se for uma sequência *m*: $R(j) = \begin{cases} 1 & j = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ -1/N & outros \end{cases}$



- Sinal PN de período $T_b = NT_c$ (sinal periódico $\Rightarrow$ espectro discreto)

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c}(1 + \frac{1}{N}) & |\tau| \le T_c \\ -\frac{1}{N} & T_c \le |\tau| \le \frac{NT_c}{2} \end{cases}$$

(um período)



$$S_c(f) = \frac{1}{N^2}\delta(f) + \frac{1+N}{N^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \delta\left(f - \frac{n}{NT_c}\right)$$