Resolução

1. Modulação Delta, com $S_N(f)=\dfrac{\Delta^2}{3f_s}$, por hipótese.

Para que não haja distorção de declive é necessário que $\dfrac{\Delta}{T_s}\geq \max\left|\dfrac{dv(t)}{dt}\right|$. Se $v(t)=A\operatorname{sen}2\pi f_m t$ então $\max\left|\dfrac{dv(t)}{dt}\right|=2\pi A f_m$ e $\Delta \geq 2\pi A f_m T_s$. Vamos considerar (segundo o enunciado) que $\Delta = 2\pi A f_m T_s = 2\pi A f_m / f_s$.

a) Sendo o filtro de reconstrução um filtro passa-baixo rectangular de largura de banda W a potência de ruído granular na sua saída vale

$$N_Q=\int_{-W}^{W} S_N(f)df=\int_{-W}^{W}\Delta^2/3f_s\,df= =\int_{-W}^{W}\frac{4\pi^2A^2f_m^2}{3f_s^3}df=\frac{8\pi^2A^2f_m^2W}{3f_s^3} \qquad c.q.d.$$

b) Potência do sinal sinusoidal: $A^2/2$.

$$S/N_Q=\frac{A^2/2}{\dfrac{8\pi^2A^2f_m^2W}{3f_s^3}}=\frac{3f_s^3}{16\pi^2f_m^2W}$$

Se $f_s=20W$ e $W=\pi f_m/\sqrt{3}$ então $S/N_Q=500$. Em dB:

$$S/N_Q(dB)=10\log(5\times100)=\underbrace{10\log 5}_{7\text{ (da tabela)}}+\underbrace{10\log 100}_{20}=27dB$$

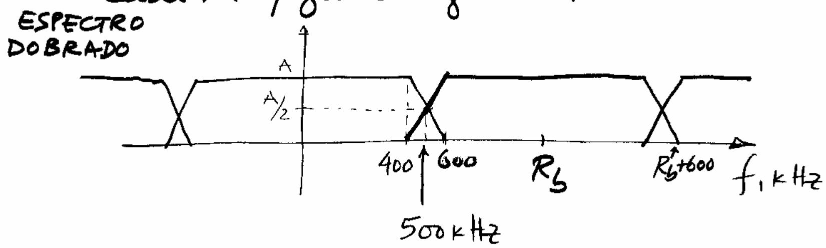
2. a) $R = 640\,\text{kbits/s}$, $\alpha = 0{,}4$

$$B_{BB} = \frac{1}{2T}(1+\alpha) = \frac{R}{2}(1+\alpha) = \frac{1{,}4 \times 640.10^3}{2} = 448\,\text{kHz}.$$

b) $16\text{-QAM} \Rightarrow M = 16 \Rightarrow k = 4$

$$B_{16\text{-QAM}} = \frac{1}{4} \times 2 B_{BB} = \frac{448.10^3}{2} = 224\,\text{kHz}.$$

c) Para que não haja ISI é necessário que a dobra do espectro dobrado ocorra na frequência indicada na figura seguinte:



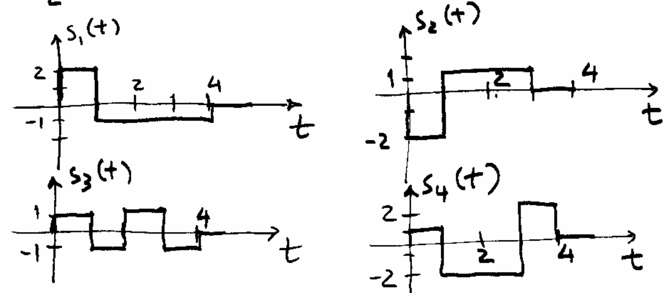
Logo, $R_b - 600 = 400 \Rightarrow R_b = 1000\,\text{kbits/s} = 1\,\text{Mbits/s}$

3. Ver outra folha

4. $\underline{s}_1 = [2 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1]^T$, $\underline{s}_2 = [-2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0]^T$

$\underline{s}_3 = [1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; -1]^T$, $\underline{s}_4 = [1 \;\; -2 \;\; -2 \;\; 2]^T$

a)



b) $d_{12} = \| \underline{s}_1 - \underline{s}_2 \| = \| [4 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -1]^T \| = \sqrt{16+4+4+1} = \sqrt{25} = 5.$

c) $\rho_{13} = \dfrac{\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_3}{\|\underline{s}_1\| \, \|\underline{s}_3\|} = \dfrac{2+1-1+1}{\sqrt{7}\;\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}.$

4. d) $\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ $\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}^T$ $\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$

Determinação de funções-base através da ortogonalização de Gram-Schmidt:

1) $$\psi_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E_1}} = \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{16+1+4}}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $g_2(t) = r_2(t) - r_{21}\psi_1(t)$. Mas r_{21} é a projecção de $r_2(t)$ (ou $\mathbf{r}_2$) no eixo ψ_1, ou seja, $r_{21} = \mathbf{r}_2 \bullet \psi_1$ (produto interno). Logo,

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{r}_2 - \underbrace{(\mathbf{r}_2 \bullet \psi_1)}_{r_{21}}\psi_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{1}{\left(\sqrt{21}\right)^2}(20+8+14)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pelo que $\|\mathbf{g}_2\| = \sqrt{E_{g_2}} = \sqrt{54}$. Assim,

$$\psi_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3) $\mathbf{g}_3 = \mathbf{r}_3 - \underbrace{(\mathbf{r}_3 \bullet \psi_1)}_{r_{31}}\psi_1 - \underbrace{(\mathbf{r}_3 \bullet \psi_2)}_{r_{32}}\psi_2$. Substituindo valores obtemos

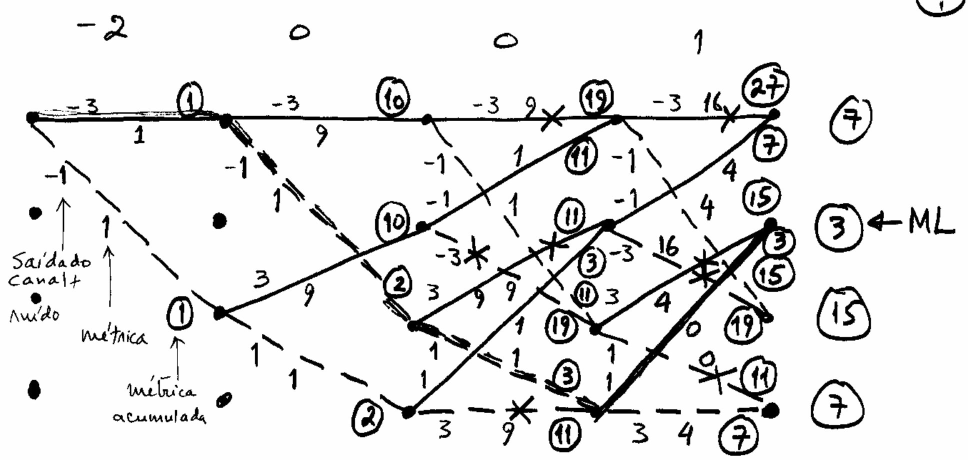
$$\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{21}{21}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{36}{54}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em resumo,

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e $N = 2$ (antes era $N = 3$).

3.



Seq. Estimada : 0 1 1 0

5. $R_b = 160$ Mbits/s $\qquad \frac{N_0}{2} = 10^{-18}\ W/Hz$

a) $T_b = \frac{1}{160 \cdot 10^6} \qquad B_{OOK} = \frac{2}{T_b} = 2R_b = 320\ MHz$

b) Em OOK é $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\langle E_b \rangle}{N_0}}\right)$, em que $\langle E_b \rangle = \frac{E_b + 0}{2}$. Sendo $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\langle E_b\rangle}{N_0}}\right) = 10^{-6}$ do gráfico de Q( ) tira-se que $\left(\frac{\langle E_b \rangle}{N_0}\right)_{dB} = 13{,}5\,dB$, ou $\langle E_b \rangle = N_0(dB) + 13{,}5$.

Ora $\frac{N_0}{2} = 10^{-18}\ W/Hz \Longrightarrow N_0 = 2 \cdot 10^{-18}$

$$\Longrightarrow 10 \log N_0 = \underbrace{10 \log 2}_{3} + \underbrace{10 \log 10^{-18}}_{-180} = 3 - 180 = -177\ dB\ (W\text{-}Hz)$$

Assim, $\langle E_b \rangle = -177 + 13{,}5 = -163{,}5\ dB$

Mas $\langle P \rangle = \frac{\langle E_b \rangle}{T_b} = \langle E_b \rangle R_b$

Em dB : $\langle P \rangle_{dBW} = \langle E_b \rangle_{dB} + 10 \log R_b$

5. (Contin.)

$$\Rightarrow \langle P\rangle_{dBW} = \langle E_b\rangle_{dB} + 10\log(16 \cdot 10^7) = \langle E_b\rangle_{dB} + 10\log 16 + 70$$

$$\text{Mas } 10\log 16 = 10\log(\underbrace{3{,}2\times 5}_{\text{ou } 4^2}) = \underbrace{10\log 3{,}2}_{5} + \underbrace{10\log 5}_{7}$$

(da tabela)

$$\Rightarrow \langle P\rangle_{dBW} = -163{,}5 + 5 + 7 + 70 = -81{,}5\ dBW$$

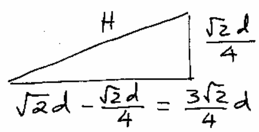
Em dBm: $\langle P\rangle_{dBm} = -81{,}5 + 30 = -51{,}5\ dBm$

6. a) $\langle E\rangle$ em função de d:

Temos três tipos de pontos na constelação com a mesma energia:

Pontos 1 e 8: $E_1 = E_8 = \left(\frac{d}{2} + d\right)^2 = \frac{9}{4}d^2$

" 2, 3, 6 e 7:



$$\Rightarrow H^2 = \frac{9\times 2}{16}d^2 + \frac{2}{16}d^2 = \frac{5}{4}d^2$$

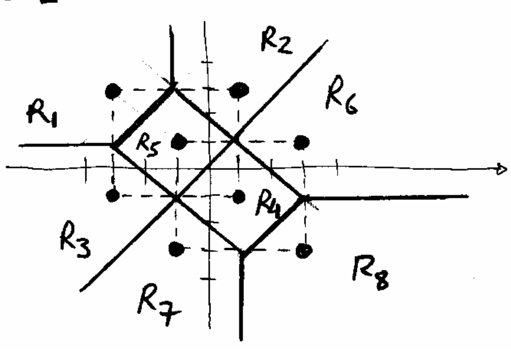
$$E_2 = E_3 = E_6 = E_7 = H^2 = \frac{5}{4}d^2$$

Pontos 4 e 5: $E_4 = E_5 = \frac{d^2}{4}$

Energia Média:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{8}\left[2\times\frac{9}{4}d^2 + 4\times\frac{5}{4}d^2 + 2\times\frac{d^2}{4}\right] = \frac{5}{4}d^2$$

b)



c) Sendo $\langle E\rangle / N_0 \gg 1$ podemos usar a aproximação $P_e \approx N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$, em que N_{med} representa o número médio de vizinhos mais próximos (à distância $d_{min} = d$).

Pontos 1 e 8: $N_{med} = 1$

Pontos 2, 3, 6 e 7: $N_{med} = 2$

Pontos 4 e 5: $N_{med} = 4$

Portanto,

$$N_{med} = \frac{1}{8}(2\times 1 + 4\times 2 + 2\times 4) = \frac{9}{4}$$

e

$$P_e \approx \frac{9}{4} Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Ora viu-se já que

$$\langle E\rangle / N_0 = \frac{5}{4} d^2 \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = \frac{4\langle E\rangle}{5}$$

Logo, a probabilidade de erro é aproximadamente igual a

$$P_e \approx \frac{9}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4\langle E\rangle}{10N_0}}\right) = \frac{9}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{\langle E\rangle}{N_0}}\right). \qquad c.q.d.$$