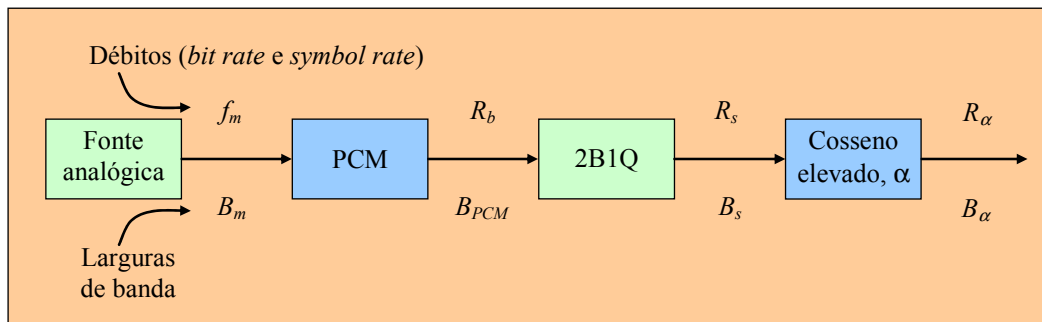


## Resolução

1. Consideremos o seguinte diagrama de blocos:



Sinal analógico:  $A \cos 2\pi \cdot 4000t$  (isto é,  $f_m = 4\text{kHz}$ ); frequência de amostragem:  $f_s = 2f_m = 2 \times 4000 = 8\text{kHz}$ ; número de níveis do codificador 2B1Q:  $M = 4$ ; factor de *roll-off*:  $\alpha = 0,5$ .

- a) As larguras de banda ao longo da cadeia de blocos estão relacionadas com os débitos binários e débitos de símbolos como segue ( $N$  é o número de bits do conversor A/D):

$$R_b = Nf_s = 2f_m N \text{ (bits/s)} \quad R_s = \frac{R_b}{\log_2 M} \text{ (símbolos/s)} \quad R_\alpha = R_s \text{ (símbolos/s)}$$

$$B_m = f_m \text{ (Hz)} \quad B_{PCM} = R_b = 2f_m N \text{ (Hz)} \quad B_s = \frac{B_{PCM}}{\log_2 M} \text{ (Hz)} \quad B_\alpha = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) \text{ (Hz)}$$

Temos, portanto,  $R_b = 96\text{ kbits/s}$  e  $R_\alpha = R_s = 48\text{ ksímbolos/s}$ . Encadeando as expressões obtemos

$$B_\alpha = \frac{B_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{2f_m N}{2 \log_2 M} (1 + \alpha) \Rightarrow N = \frac{B_\alpha \log_2 M}{f_m (1 + \alpha)}$$

Substituindo valores obtemos finalmente

$$N = \frac{B_\alpha \log_2 M}{f_m (1 + \alpha)} = \frac{36 \cdot 10^3 \times 2}{4 \cdot 10^3 \times 1,5} = 12 \text{ bits}$$

- b) Com quantização não-uniforme (lei A) e uma potência de sinal baixa a relação sinal-ruído de quantização é aproximadamente a mesma se o conversor A/D usar menos quatro bits que com quantização uniforme, ou seja, se usar oito bits por nível.

- c)  $A = \sqrt{20}\text{ mV}$ ,  $N = 10\text{ bits}$  e  $m_{\max} = 1\text{V}^*$ . A potência do sinal é igual a  $P = \frac{A^2}{2} = 10^{-5}\text{ W}$  (ou  $-50\text{dB}$ ). Relação sinal-ruído de quantização:  $\left(\frac{S}{N}\right)_Q = \frac{3P}{m_{\max}^2} L^2 = \frac{3P}{m_{\max}^2} 2^{2N}$ . Sendo  $m_{\max} = 1$  então  $\left(\frac{S}{N}\right)_Q = \frac{3P}{m_{\max}^2} 2^{2N} = 3P \times 2^{2N}$ .

Em dB vale

\*  $m_{\max} = 1\text{V}$  porque, segundo o enunciado, a quantização é normalizada.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q \text{ (dB)} = \underbrace{10 \log_{10} 3}_{4,8} + \underbrace{\frac{P_{dB}}{-50}}_{-50} + \underbrace{\frac{2N}{20}}_{20} \times \underbrace{10 \log_{10} 2}_{3} =$$

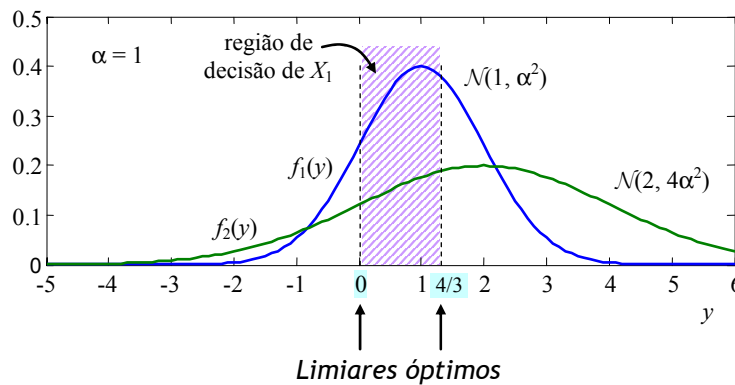
$$= 14,8 \text{ dB}$$

Nota: a expressão  $(S/N)_Q = 1,8 + 6N$  (dB) é válida para sinais sinusoidais de amplitude  $A = m_{\max}$ . Como aqui  $A \neq m_{\max}$  esta expressão não pode ser usada.

2. Temos duas funções densidade de probabilidade (fdp) de ruído gaussiano (ver figura seguinte): uma fdp (chamemos-lhe  $f_1(y)$ ) está centrada em  $X_1 = 1$  e tem variância  $\sigma_1^2 = \alpha^2 X_1^2 = \alpha^2$ , e a outra,  $f_2(y)$ , está centrada em  $X_2 = 2$  e tem variância mais elevada,  $\sigma_2^2 = \alpha^2 X_2^2 = 4\alpha^2$  (logo, esta fdp está mais espalhada mas é mais achatada):

$$N | X_1 \sim \mathcal{N}(1, \alpha^2) \quad \Rightarrow \quad f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2\sigma_1^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2\alpha^2}\right]$$

$$N | X_2 \sim \mathcal{N}(2, 4\alpha^2) \quad \Rightarrow \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y-2)^2}{2\sigma_2^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi\alpha^2}} \exp\left[-\frac{(y-2)^2}{8\alpha^2}\right]$$



a) O limiar de decisão óptimo,  $\gamma$ , deve satisfazer a condição  $\frac{P(X_2)}{P(X_1)} = \frac{f_1(\gamma)}{f_2(\gamma)}$ . Substituindo valores temos

$$\frac{2/3}{1/3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left[-\frac{-(\gamma-1)^2}{2\alpha^2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{8\pi\alpha^2}} \exp\left[-\frac{-(\gamma-2)^2}{8\alpha^2}\right]} \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 \exp\left[\frac{-(\gamma-1)^2}{2\alpha^2} + \frac{(\gamma-2)^2}{8\alpha^2}\right]$$

ou  $\exp\left[\frac{-3\gamma^2 + 4\gamma}{8\alpha^2}\right] = 1$ , pelo que terá de ser  $\frac{-3\gamma^2 + 4\gamma}{8\alpha^2} = 0$ , ou  $\gamma(4 - 3\gamma) = 0$ , donde se conclui que, ao contrário

do que é costume (em que há um limiar único), há dois limiares óptimos,  $\gamma_1 = 0$  e  $\gamma_2 = 4/3$ , já indicados na figura acima. A regra de decisão óptima é a seguinte:

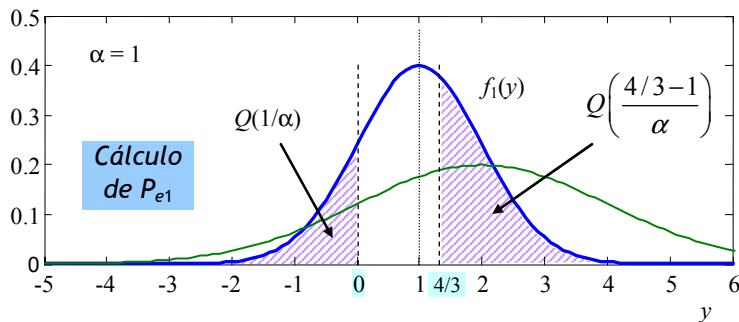
$$\hat{X} = X_1 \quad \text{se } 0 \leq Y \leq \frac{4}{3}$$

$$\hat{X} = X_2 \quad \text{para outros valores de } Y$$

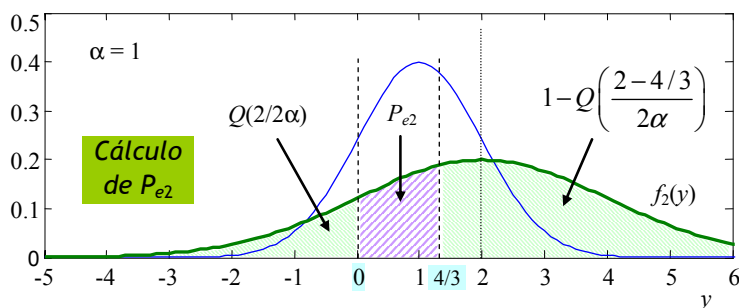
b) Probabilidade de erro:  $P_e = P(X_1) \underbrace{P(\text{erro} | X_1)}_{P_{e_1}} + P(X_2) \underbrace{P(\text{erro} | X_2)}_{P_{e_2}}$ .

De acordo com a figura seguinte a probabilidade condicional  $P_{e_1}$  – que está associada a  $\mathcal{N}(1, \alpha^2)$  – vale

$$P_{e_1} = P(y < 0 \vee y > 4/3 | X = X_1) = \\ = Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) + Q\left(\frac{4/3 - 1}{\alpha}\right) = Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) + Q\left(\frac{1/3}{\alpha}\right)$$



A probabilidade condicional  $P_{e_2}$  – associada a  $\mathcal{N}(2, 4\alpha^2)$  – calcula-se de forma semelhante, como se mostra na figura seguinte:



$$P_{e_2} = 1 - P(y < 0 \vee y > 4/3 | X = X_2) = \\ = 1 - \left[ 1 - Q\left(\frac{2 - 4/3}{2\alpha}\right) + Q\left(\frac{2}{2\alpha}\right) \right] = Q\left(\frac{1/3}{\alpha}\right) - Q\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

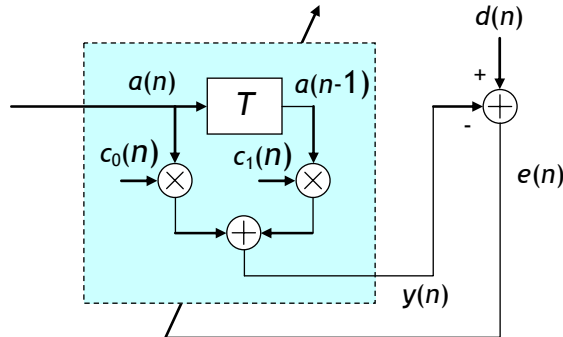
Portanto, a probabilidade de erro procurada é igual a

$$P_e = P(X_1)P_{e_1} + P(X_2)P_{e_2} = \\ = \frac{1}{3} \left[ Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) + Q\left(\frac{1/3}{\alpha}\right) \right] + \frac{2}{3} \left[ Q\left(\frac{1/3}{\alpha}\right) - Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right] = \\ = Q\left(\frac{1/3}{\alpha}\right) - \frac{1}{3} Q\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

**3.** Na figura seguinte é apresentado o esquema de igualização adaptativa previsto. Nele os dois coeficientes  $\mathbf{c}(n) = [c_0(n) \ c_1(n)]^T$  do igualizador são actualizados no algoritmo LMS de acordo com a expressão

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{a}(n),$$

em que  $\mathbf{a}(n)$  é um vector de dados de entrada de dois elementos,  $\mathbf{a}(n)=[a(n) \ a(n-1)]^T$ , e o erro  $e(n)$  é um escalar igual à diferença entre a resposta desejada  $d(n)$  e a saída do igualizador  $y(n)=\mathbf{c}^T(n)\mathbf{a}(n)$ . Ou seja,  $e(n)=d(n)-\mathbf{c}^T(n)\mathbf{a}(n)$ .



Os dados do problema repetem-se na tabela seguinte:

Contagem de iterações	$n$	100	101	102	103	104	105	...
Saída do canal	$a(n)$	1	-2	-5	4	3	-3	...
Resposta desejada	$d(n)$	1	-1	1	-1	-1	1	...
Coefficientes do igualizador usando o algoritmo LMS	$\mathbf{c}(n)$	...	...	$\begin{bmatrix} 1/6 \\ -4/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ?? \\ ?? \end{bmatrix}$	...	...

Da tabela vemos que

$$\mathbf{a}(103) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}(103) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad d(103) = -1$$

o que permite calcular o erro na iteração nº 103:

$$\begin{aligned} e(103) &= d(103) - \mathbf{c}^T(103)\mathbf{a}(103) = \\ &= -1 - [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = -1 - (4 + 5) = \\ &= -10 \end{aligned}$$

Só falta determinar  $\mathbf{c}(104)$ , o que faremos através de  $\mathbf{c}(104) = \mathbf{c}(103) + 2\mu e(103)\mathbf{a}(103)$ , com  $\mu = 0,1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(104) &= \mathbf{c}(103) + 2\mu e(103)\mathbf{a}(103) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\mu(-10) \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 80\mu \\ -1 + 100\mu \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Modulações QPSK e 4-FSK. Se  $R_b = 200$  kbits/s, então em ambas as modulações é  $R_s = 100$  ksímbolos/s, ou  $R_s(dB) = 10 \log_{10} R_s = 50$  dB. Quanto a  $N_0 = 10^{-12}$  W/Hz, em dB temos  $N_0(dB) = 10 \log_{10} N_0 = -120$  dB.

- a) QPSK e  $P_e = 8.10^{-6}$ . A probabilidade de símbolo errado é dada por  $P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 8.10^{-6}$ , ou seja:

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 4.10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = \frac{2E_b}{N_0} = 13 \text{ dB (do gráfico da função } Q).$$

Vamos apresentar duas alternativas de resolução:

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= 13 - 10 \log_{10} 2 = 13 - 3 = 10 \text{ dB} \\ &\Downarrow \\ E_b/N_0 &= 10 \\ &\Downarrow \\ E_b &= 10N_0 = 10 \times 10^{-12} = 10^{-11} \text{ J.} \\ &\Downarrow \\ P &= \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b \\ &\Downarrow \\ P &= E_b R_b = 10^{-11} \times 200.10^3 = 2.10^{-6} \text{ W} = 2 \mu\text{W} \\ &\Downarrow \\ P &= 10 \log_{10} 2.10^{-6} = \\ &= \underbrace{10 \log_{10} 2}_3 + \underbrace{10 \log_{10} 10^{-6}}_{-60} = -57 \text{ dBW} \end{aligned}$$

Resolução alternativa

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{N_0} &= 13 \text{ dB} \\ &\Downarrow \\ E_s \text{ (dB)} &= 13 - 120 = -107 \text{ dB} \\ &\Downarrow \\ P &= E_s R_s \\ &\Downarrow \\ P \text{ (dB)} &= E_s + 10 \log_{10} R_s = -107 + 50 = -57 \text{ dBW} \\ &\text{(como esperado)} \end{aligned}$$

- b) 4-FSK,  $P = -59 \text{ dBW}$ . Com detecção coerente a probabilidade de símbolo errado é majorada por  $P_e \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$  e esta está relacionada com  $P_b$  através de  $P_b = \frac{M/2}{M-1} P_e$ .

Vimos atrás que  $N_0 \text{ (dB)} = -120 \text{ dB (W-Hz)}$  e que  $R_s \text{ (dB)} = 50 \text{ dB}$ . Ora  $P = E_s R_s$ , isto é,  $E_s = \frac{P}{R_s}$ . Logo,

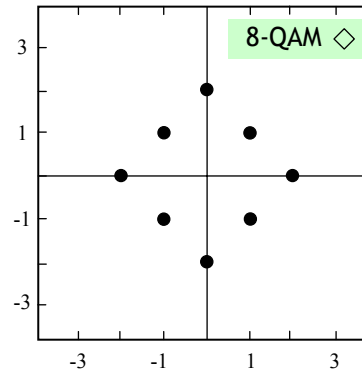
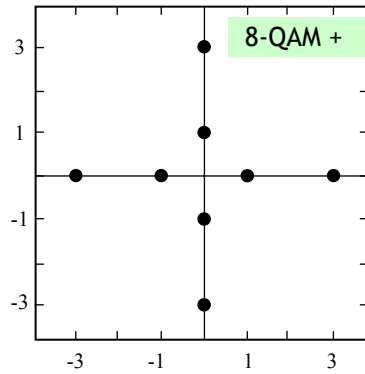
$$E_s \text{ (dB)} = P \text{ (dB)} - R_s \text{ (dB)} = -59 - 50 = -109 \text{ dB}$$

$$E_s/N_0 \text{ (dB)} = -109 + 120 = 11 \text{ dB.}$$

Consultando o gráfico da função  $Q$  para este valor de 11 dB verificamos que  $Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 2.10^{-4}$  e, portanto,

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 3 \times 2.10^{-4} = 6.10^{-4}. \text{ Finalmente concluímos que } P_b = \frac{M/2}{M-1} P_e = \frac{2}{3} \times 6.10^{-4} = 4.10^{-4}.$$

5. Constelações especiais 8-QAM + e 8-QAM  $\diamond$ .



a) Segundo o enunciado, a unidade de medida dos eixos é  $d/2$  (por exemplo, os pontos de 8AM+ que estão no eixo  $\psi_1$  têm abscissas  $\pm d/2$  e  $\pm 3d/2$ ). Em ambos os casos se verifica  $d_{\min} = d/\sqrt{2}$ . Vamos ter:

Constelação 8-QAM +

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i = \frac{1}{8} \left[ 4 \left( \frac{d}{2} \right)^2 + 4 \left( \frac{3d}{2} \right)^2 \right] = \frac{5}{4} d^2 \quad d_{\min} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5} \langle E \rangle}$$

Se  $\langle E \rangle = 1$  então  $d_{\min} = \sqrt{\frac{2}{5} \langle E \rangle} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ .

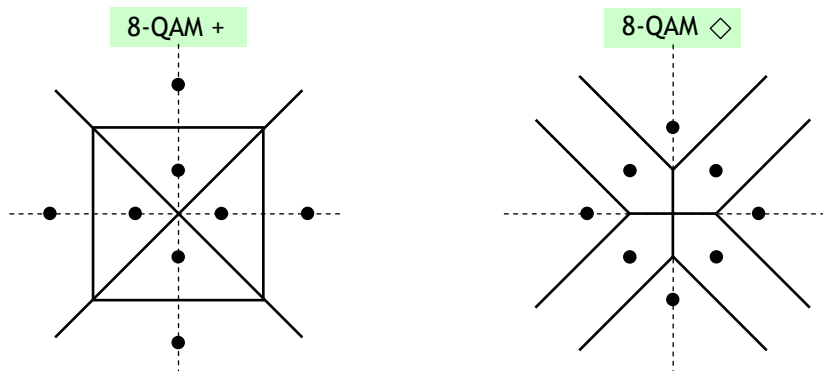
Constelação 8-QAM  $\diamond$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i = \frac{1}{8} \left[ 4 \times \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 + 4d^2 \right] = \frac{3}{4} d^2 \quad d_{\min} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \langle E \rangle}$$

Se  $\langle E \rangle = 1$  então  $d_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3} \langle E \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Concluindo: se ambas as constelações tiverem a mesma energia média a distância mínima é menor em 8-QAM+.

b) As regiões de decisão adequadas são as seguintes:



6. 64-QAM:  $M = L^2 = 64$ . No receptor os decisores têm  $L - 1 = 7$  limiares. Se, por exemplo, os pontos da constelação tiverem coordenadas  $\{\pm i, \pm j\}$ ,  $i, j \in \{1, 3, 5, 7\}$ , os limiares de decisão em cada eixo estão situados em  $0, \pm 2, \pm 4$  e  $\pm 6$ . Eis o diagrama de blocos do receptor coerente:

