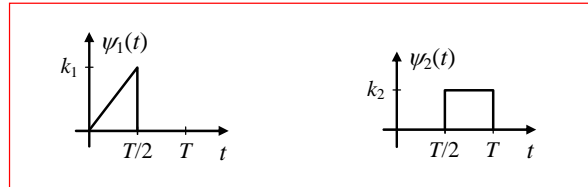


Resolução

1.

- a) a₁) Seja $b = \sqrt{6/T}$. Um exemplo (mas não o único!) de funções-base definidoras de um espaço ortonormado (o. n.) adequado às formas de onda dadas é o seguinte (os valores de k_1 e k_2 serão calculados abaixo):



Estas duas funções-base bastam-nos para exprimir as formas de onda dadas (ver a seguir).

Os parâmetros k_1 e k_2 devem ser tais que $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ têm energia unitária:

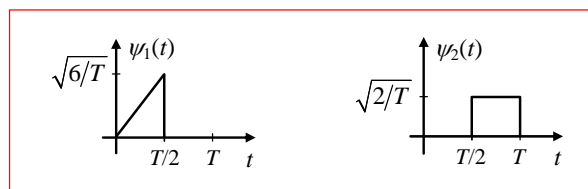
$$\int_0^{T/2} \psi_1^2(t) dt = \int_0^{T/2} \left(\frac{k_1}{T/2} t \right)^2 dt = \frac{4k_1^2}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T/2} = \frac{k_1^2 T}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \sqrt{\frac{6}{T}}$$

$$\int_{T/2}^T \psi_2^2(t) dt = \int_{T/2}^T k_2^2 dt = k_2^2 \frac{T}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \sqrt{\frac{2}{T}}$$

a₂) Estas funções-base são ortogonais, como devem:

$$\int_0^T \psi_1(t) \psi_2(t) dt = 0 \quad (\text{é nulo porque as funções não se sobrepõem})$$

Repetindo a figura acima temos então



Facilmente confirmamos que o conjunto dado de quatro formas de onda $s_1(t)$, ..., $s_4(t)$ é completamente definido por apenas estas duas funções-base (o que mostra que este espaço o. n. tem duas dimensões):

$$s_1(t) = \psi_1(t) + \sqrt{3}\psi_2(t) \quad \Rightarrow \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$s_2(t) = -\psi_1(t) + \sqrt{3}\psi_2(t) \quad \Rightarrow \quad s_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$s_3(t) = \psi_1(t) - \sqrt{3}\psi_2(t) \quad \Rightarrow \quad s_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$s_4(t) = -\psi_1(t) - \sqrt{3}\psi_2(t) \quad \Rightarrow \quad s_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

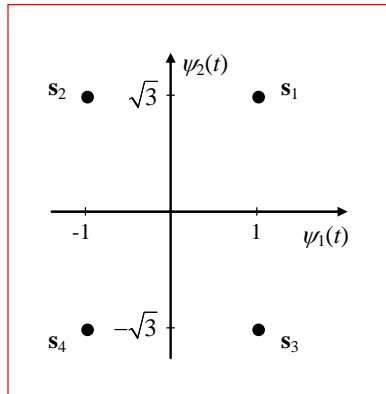
Podemos ainda verificar que as funções-base apresentadas podem ser expressas à custa das formas de onda $s_i(t)$:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}[s_1(t) - s_2(t)] \quad (\text{ou } \psi_1(t) = \frac{1}{2}[s_3(t) - s_4(t)])$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[s_1(t) + s_2(t)] \quad (\text{ou } \psi_2(t) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}[s_3(t) + s_4(t)])$$

a₃) Como nos bastam duas funções-base este espaço o. n. tem duas dimensões.

b) Tendo em conta os vectores apresentados na alínea anterior a constelação pedida é a seguinte:



c) Energia média: $\langle E \rangle = \sum_{i=1}^4 P_i E_i = \sum_{i=1}^4 P_i \|d_i\|^2$, em que d_i é a distância de cada ponto à origem. Como todos os pontos estão à mesma distância da origem os sinais têm a mesma energia, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_{i=1}^4 P_i \|d_i\|^2 = \|d_i\|^2 \sum_{i=1}^4 P_i = \|d_i\|^2 = \\ &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \end{aligned}$$

Note-se que a energia média destas quatro formas de onda afinal não depende da sua probabilidade de ocorrência.

Em alternativa a energia de cada forma de onda poderia ser calculada por integração. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \int_0^T s_1^2(t) dt &= \int_0^{T/2} s_1^2(t) dt + \int_{T/2}^T s_1^2(t) dt = \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

d) Nesta alínea queremos estabelecer a regra de detecção MAP (máxima probabilidade a posteriori), determinar limiares de decisão e desenhar as regiões de decisão correspondentemente.

Em primeiro lugar, como s_3 e s_4 nem sequer ocorrem (porque a sua probabilidade é nula) a estimação é simplesmente uma decisão binária entre s_1 e s_2 . Em segundo lugar, como s_1 e s_2 têm a mesma ordenada e apenas diferem na abcissa, se se receber o vector \mathbf{r} basta ter em atenção o valor da sua projecção no eixo ψ_1 (pois a projecção no eixo ψ_2 não ajuda a decidir). Isto quer dizer que a fronteira das duas regiões de decisão é uma linha vertical no espaço de sinal. Podemos já antecipar que, visto s_1 ser menos provável que s_2 , a linha de separação se deve situar no semiplano direito, mais próxima de s_1 do que de s_2 .

A projecção do vector recebido no eixo ψ_1 – chamemos-lhe r_1 – é igual a

$$r_1 = \begin{cases} 1+n & \text{se } \mathbf{s}_1 \text{ foi enviado} \\ -1+n & \text{se } \mathbf{s}_2 \text{ foi enviado} \end{cases}$$

em que n representa o ruído gaussiano $\mathcal{N}(0, N_0/2)$. Ou seja, temos duas fdp condicionais $\mathcal{N}(\pm 1, N_0/2)$:

$$f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_1-1)^2}{N_0}} \quad (\mathcal{N}(1, N_0/2))$$

$$f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_1+1)^2}{N_0}} \quad (\mathcal{N}(-1, N_0/2))$$

A regra de decisão MAP é $P(\mathbf{s}_1 | r_1) \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} P(\mathbf{s}_2 | r_1)$. Aplicando-lhe o teorema de Bayes,

$$\frac{f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_1)P(\mathbf{s}_1)}{f_{r_1}(r_1)} \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} \frac{f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_2)P(\mathbf{s}_2)}{f_{r_1}(r_1)},$$

chegamos à conhecida expressão

$$f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_1)P(\mathbf{s}_1) \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} f_{r_1}(r_1 | \mathbf{s}_2)P(\mathbf{s}_2).$$

Desenvolvendo e substituindo valores ($P(\mathbf{s}_1) = 1/3$, $P(\mathbf{s}_2) = 2/3$ e $N_0 = 1$) obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_1-1)^2}{N_0}} \cdot \frac{1}{3} \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_1+1)^2}{N_0}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow e^{-(r_1-1)^2} \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} 2 e^{-(r_1+1)^2}.$$

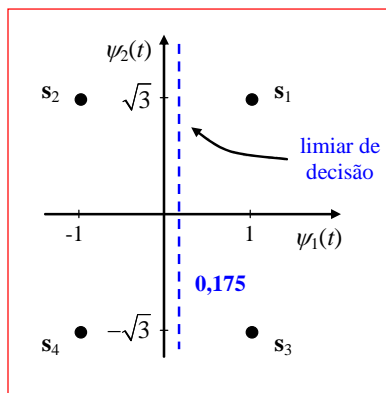
Aplicando logaritmos chegamos a

$$-(r_1-1)^2 \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} \ln 2 - (r_1+1)^2 \Rightarrow -r_1^2 + 2r_1 - 1 \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} \ln 2 - r_1^2 - 2r_1 - 1$$

donde se conclui que, sendo $\ln 2 \approx 0,7$, a regra de decisão MAP procurada é esta:

$$r_1 \underset{\mathbf{s}_2}{\geq} \frac{\ln 2}{4} \approx 0,175.$$

O limiar de decisão situa-se, pois, na abcissa 0,175, como se mostra na figura seguinte. Como se disse antes, já era de contar que o limiar estivesse mais próximo de \mathbf{s}_1 do que de \mathbf{s}_2 pois aquele símbolo é menos provável.



2. A resposta impulsional (contínua) do filtro adaptado a $v_0(t)$ é $c(t) = kv_0(T-t)$. Para simplificar vamos fazer $k = 1$.

a) Os valores da saída do filtro adaptado óptimo são $\pm E$, em que E é a energia do símbolo $v_0(t)$:

$$\begin{aligned} z(T) &= E = \int_0^T v_0^2(t) dt = \\ &= \int_0^{T/2} \left(\frac{2A}{T}t\right)^2 dt + \int_{T/2}^T A^2 dt = \\ &= \frac{2A^2T}{3} \end{aligned}$$

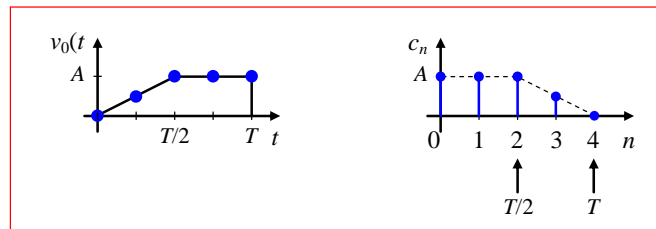
Substituindo A pelo seu valor obtemos $z(T) = 32/3$. Se se tivesse transmitido $v_1(t)$ o valor obtido seria $z(T) = -32/3$.

b) A relação sinal-ruído óptima não depende do valor de k e vale

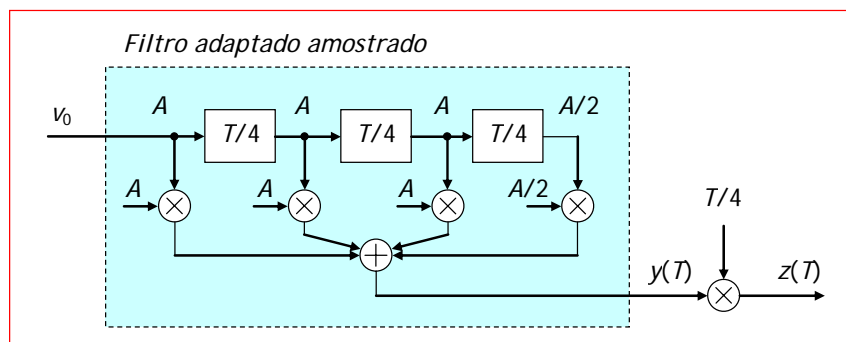
$$(S/N) = \frac{2E}{N_0}.$$

Substituindo valores: $(S/N) = \frac{2 \times 32/3}{0,24} = \frac{800}{9}$ ou, em dB, $10 \log 8 + 10 \log 100 - 10 \log 9 = 9 + 20 - 9,5 = 19,5$ dB.

c) A resposta impulsional amostrada do correspondente filtro transversal (FIR) adaptado é $c_n = v_0(T-nT_s)$, em que T_s é o atraso introduzido por cada andar do filtro FIR. Neste caso é $T_s = T/4$, $c_0 = c_1 = c_2 = A$ e $c_3 = A/2$. Assim, temos o seguinte:



No instante óptimo de amostragem ($t = T$) o filtro FIR encontra-se preenchido como se mostra na figura seguinte, se $v_0(t)$ tiver sido transmitido:



Nesse instante $t = T$ a saída do filtro FIR é igual a

$$y(T) = A^2 + A^2 + A^2 + \frac{A^2}{4} = \frac{13}{4} A^2.$$

Temos de normalizar este valor multiplicando-o¹ por $T_s = T/4$:

¹ Porquê? Não é este filtro uma aproximação de um integrador? Logo...

$$z(T) = y(T) \frac{T}{4} = \frac{13}{16} A^2 T \Rightarrow z(T) = 13 \quad (\text{porque } A = \sqrt{16/T})$$

Caso se tivesse transmitido $v_1(t)$ obter-se-ia o valor simétrico, -13. Obteríamos os mesmos resultados se em vez da multiplicação por T_s tivéssemos considerado logo de início coeficientes de valor $c_n = T_s v_0(T - nT_s)$.

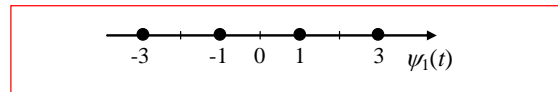
O erro percentual relativamente ao valor ideal é $\frac{13 - 32/3}{32/3} = 21,9\%$. Se o quisermos baixar temos de aumentar a

frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$, isto é, aumentar o número de coeficientes do filtro.

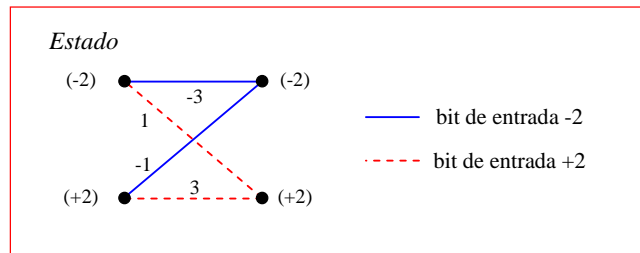
3. A saída $y_k = x_k + 0,5x_{k-1} + n_k$ do canal depende do bit de entrada corrente x_k e do bit anterior, x_{k-1} . Como este último representa o *estado* do canal significa que temos dois estados possíveis (+2 e -2, se $x_{k-1} = \pm 2$). Podemos construir a tabela seguinte:

| Entrada, x_k | Estado actual, x_{k-1} | Estado seguinte | Saída, y_k |
|----------------|--------------------------|-----------------|--------------|
| -2 | -2 | -2 | -3 |
| +2 | -2 | +2 | 1 |
| -2 | +2 | -2 | -1 |
| +2 | +2 | +2 | 3 |

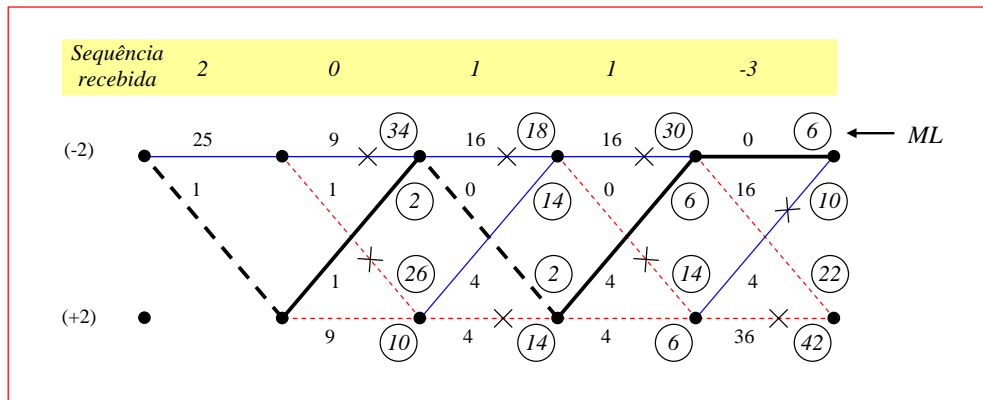
- a) De acordo com a tabela anterior os valores possíveis de y_k são ± 1 e ± 3 . Assim, a constelação pedida é



- b) Treliça do canal:



- c) A estimativa de máxima verosimilhança (ML) vai ser obtida à custa do algoritmo de Viterbi. Para isso, na treliça seguinte foi colocada a métrica de cada ramo, isto é, a distância euclidiana quadrática entre o valor recebido e o valor de saída do canal, bem como as métricas acumuladas dos percursos sobreviventes.



O percurso de máxima verosimilhança (ML), assinalado a grosso, tem métrica acumulada 6. A sequência estimada é +2 -2 +2 -2 -2.

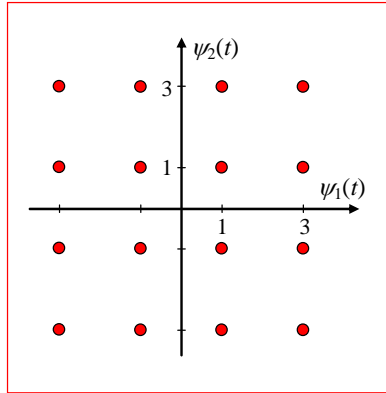
d) Vamos considerar os dois canais propostos:

d1) Canal anterior: $y_k = x_k + 0,5x_{k-1} + n_k$; entrada: $x_k = (\pm 2, \pm 2)$ – ou seja, quatro pontos no espaço bidimensional.

Os valores possíveis de y_k sem ruído são

$$y_k = [\pm(2i-1), \pm(2j-1)], \quad i, j = 1 \text{ e } 2$$

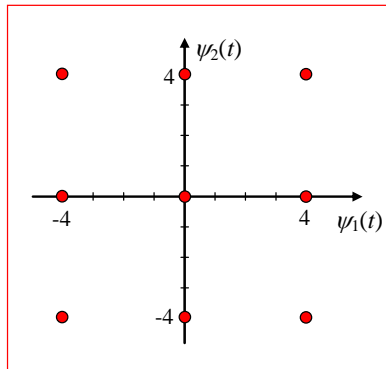
(por exemplo: (1,1), (-1,1), (-1,3), (-1,-3), etc.). São dezasseis pontos dispostos como na figura seguinte:



d2) Canal novo: $y_k = x_k + x_{k-1} + n_k$; entrada: $x_k = (\pm 2, \pm 2)$. Os valores possíveis de y_k sem ruído são

$$y_k = \underbrace{(\pm 4, \pm 4)}_{4 \text{ pontos}} \vee \underbrace{(0, \pm 4)}_{2 \text{ pontos}} \vee \underbrace{(\pm 4, 0)}_{2 \text{ pontos}} \vee \underbrace{(0, 0)}_{1 \text{ ponto}}$$

Ao todo são nove pontos que desenham a constelação seguinte:



4. Probabilidades de erro em várias modulações.

a) As probabilidades de bit errado em DPSK e em BFSK não-coerente são, respectivamente, $P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$ e

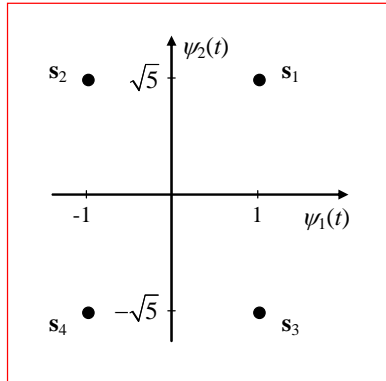
$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$. Queremos que P_b (DPSK) = P_b (BFSK)/4, isto é,

$$\frac{1}{2} e^{-E_b/N_0} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} = \ln 4 + \frac{E_b}{2N_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} = 2 \ln 4$$

Daqui se tira que $\frac{E_b}{N_0} = 2 \ln 2^2 = 4 \ln 2 \approx 4 \times 0,7$ ou, em dB,

$$\frac{E_b}{N_0} (dB) = \underbrace{10 \log_{10} 4}_6 + \underbrace{10 \log_{10} 7}_{8,5} - \underbrace{10 \log_{10} 10}_{10} = 4,5 \text{ dB.}$$

- b) BFSK com detecção coerente necessita de mais 3 dB na relação E_b/N_0 para se obter a mesma probabilidade de bit errado. Portanto, se em BPSK se tem $E_b/N_0 = 8$ dB então em BFSK é preciso que $E_b/N_0 = 11$ dB.
- c) Constelação nos pontos de coordenadas $(\pm 1, \pm \sqrt{5})$



Probabilidade de símbolo errado: $P_e = \sum_i P_i P_{e_i} = P_{e_i}$ (porque a probabilidade de erro P_{e_i} é igual para todos os pontos; como se vê, P_e não depende das probabilidades de ocorrência dos símbolos). Portanto, para calcular P_e basta calcular a probabilidade de erro associada a um dos pontos. O que faremos é calcular primeiro a probabilidade de decisão correcta, P_c , que é a probabilidade de haver decisões correctas segundo cada eixo (com probabilidades P_{c_1} e P_{c_2}). Como as decisões são independentes deverá ser $P_c = P_{c_1} P_{c_2}$:

$$\begin{aligned} P_c &= P_{c_1} P_{c_2} = \left[1 - Q\left(\frac{2}{\sqrt{2N_0}}\right) \right] \left[1 - Q\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2N_0}}\right) \right] = \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \right] \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{10}{N_0}}\right) \right] \end{aligned}$$

Os numeradores das fracções da primeira linha representam as distâncias mínimas segundo os dois eixos.

Tomando $N_0 = 1$ fica $P_c = \left[1 - Q(\sqrt{2}) \right] \left[1 - Q(\sqrt{10}) \right]$. A probabilidade de erro vem então dada por

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c = 1 - \left[1 - Q(\sqrt{2}) \right] \left[1 - Q(\sqrt{10}) \right] = \\ &= Q(\sqrt{2}) + Q(\sqrt{10}) - Q(\sqrt{2})Q(\sqrt{10}) \end{aligned}$$

Vamos converter os números 2 e 10 em dB para podermos usar o gráfico da função Q:

$$2 \rightarrow 3 \text{ dB} \quad 10 \rightarrow 10 \text{ dB}$$

Do gráfico tiramos então que $Q(\sqrt{2}) = 8 \cdot 10^{-2}$ e $Q(\sqrt{10}) = 8 \cdot 10^{-4}$ pelo que $Q(\sqrt{2})Q(\sqrt{10}) = 64 \cdot 10^{-6}$. Logo,

$$\begin{aligned} P_e &= Q(\sqrt{2}) + Q(\sqrt{10}) - Q(\sqrt{2})Q(\sqrt{10}) = \\ &= 0,080864 \end{aligned}$$

5. Modulação QAM.

a) Sabemos que $E_0 = \frac{3\langle E_s \rangle}{2(M-1)}$, logo, em 16-QAM é $E_0 = \frac{3\langle E_s \rangle}{2 \times 15} = \frac{\langle E_s \rangle}{10}$. Mas como $\frac{\langle E_s \rangle}{N_0} = 10$ então

$\frac{E_0}{N_0} = \frac{\langle E_s \rangle / N_0}{10} = 1$. Substituindo valores na expressão da probabilidade de símbolo

errado, $P_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}} \right)$, obtemos

$$P_e = 4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) Q(\sqrt{2}) = 3Q(\sqrt{2})$$

Para consultarmos o gráfico da função Q temos primeiro que converter o radicando do seu argumento em dB:

$2 \rightarrow 3$ dB. Para este valor encontramos no gráfico $Q(\sqrt{2}) = 8.10^{-2}$. Desse modo é $P_e = 3Q(\sqrt{2}) = 24.10^{-2} = 0,24$.

Como, com codificação de Gray, é $P_b \approx \frac{P_e}{\log_2 M} = \frac{P_e}{4}$, então $P_b \approx \frac{P_e}{4} = 0,06$.

b) Na constelação de 64-QAM encontramos três conjuntos de pontos, cada um com um determinado número de vizinhos mais próximos (pontos à distância mínima):

- Nos cantos temos quatro pontos com 2 vizinhos mais próximos;
- Os restantes pontos exteriores (24) têm 3 vizinhos mais próximos;
- Todos os 36 pontos interiores têm 4 vizinhos mais próximos.

Assim, o número médio de vizinhos mais próximos é igual a

$$N_{med} = \frac{1}{64} (4 \times 2 + 24 \times 3 + 36 \times 4) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

c) Os impulsos de cosseno elevado são gerados à taxa R_s , símbolos/s e ocupam a largura de banda $B_\alpha = \frac{R_s}{2}(1+\alpha)$.

Após modulação o sinal ocupa a largura de banda $B_{QAM} = 2B_\alpha$, que não deve ser superior a $B = 4$ kHz:

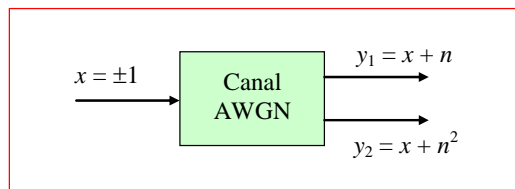
$$B_{QAM} = 2 \frac{R_s}{2} (1+\alpha) \leq B \quad \Rightarrow \quad R_s \leq \frac{B}{1+\alpha} \leq \frac{B}{1,5}$$

A taxa de símbolos está relacionada com a taxa binária através de $R_s = \frac{R_b}{\log_2 M}$, ou seja,

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2 M} \leq \frac{B}{1,5} \quad \Rightarrow \quad \log_2 M \geq 1,5 \frac{R_b}{B} = \frac{1,5 \times 9600}{4000} = 3,6 \quad \Rightarrow \quad M \geq 2^{3,6} = 12,1$$

Concluimos assim que o valor mínimo de M é 16: deveremos usar 16-QAM.

6. Temos o seguinte:



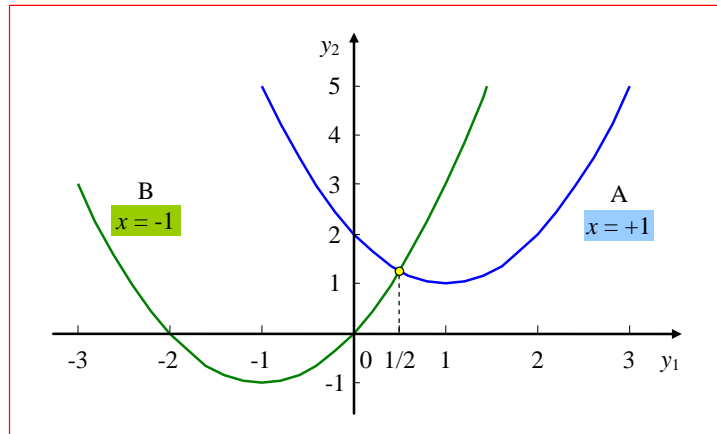
a) O que vamos ter não é propriamente “regiões de decisão” mas sim um mapeamento exacto entre o par (y_1, y_2) e o valor transmitido de x . De $y_1 = x + n$ tiramos $n = y_1 - x$ que, substituído na equação de y_2 , nos conduz a

$$y_2 = x + n^2 = x + (y_1 - x)^2 = y_1^2 - 2xy_1 + x^2 + x$$

Isto significa que y_2 é uma função quadrática de y_1 . Como o sinal x só pode tomar dois valores, ± 1 , vamos ter duas situações possíveis:

Se $x = +1 \Rightarrow y_2 = y_1^2 - 2y_1 + 2$ (curva A na figura seguinte)

Se $x = -1 \Rightarrow y_2 = y_1^2 + 2y_1$ (curva B na figura seguinte)



Cada par (y_1, y_2) pertence a uma das parábolas: se estiver na curva A (exemplo: $y_1 = 2, y_2 = 2$) escolhemos $x = +1$, se estiver na outra (exemplo: $y_1 = 1, y_2 = 3$) escolhemos $x = -1$.

- b) Conhecendo o par (y_1, y_2) e desde que $y_1 \neq 0,5$ (ponto de intersecção das curvas) identificamos inequivocamente a parábola pelo que não há dúvida nenhuma sobre o bit x transmitido; logo, a probabilidade de erro é nula, independentemente do valor de σ^2 .
- c) Com $y_1 = 0,5$ já é diferente pois o par (y_1, y_2) pertence às duas curvas. Podemos mesmo assim escolher o bit mais provável. De facto, se $y_1 = 0,5$ temos dois casos consoante $x = +1$ ou $x = -1$:

$$\text{Se } x = +1 \Rightarrow n = y_1 - x = 0,5 - 1 = -0,5$$

$$\text{Se } x = -1 \Rightarrow n = y_1 - x = 0,5 + 1 = 1,5$$

Ora sendo o ruído uma variável gaussiana de média nula, o que é que é mais provável, $n = -0,5$ ou $n = 1,5$? Claramente $n = -0,5$. Portanto, se $y_1 = 0,5$ o mais certo é que tenha sido transmitido o bit $x = +1$. Matematicamente esta decisão é tomada porque $p_n(n = -0,5) > p_n(n = 1,5)$, onde $p_n(n)$ é a função densidade de probabilidade do ruído AWGN.