

# O estranho caso de $\pi/4$

## Ou como Mengali e d'Andrea se enganaram (e me enganaram)

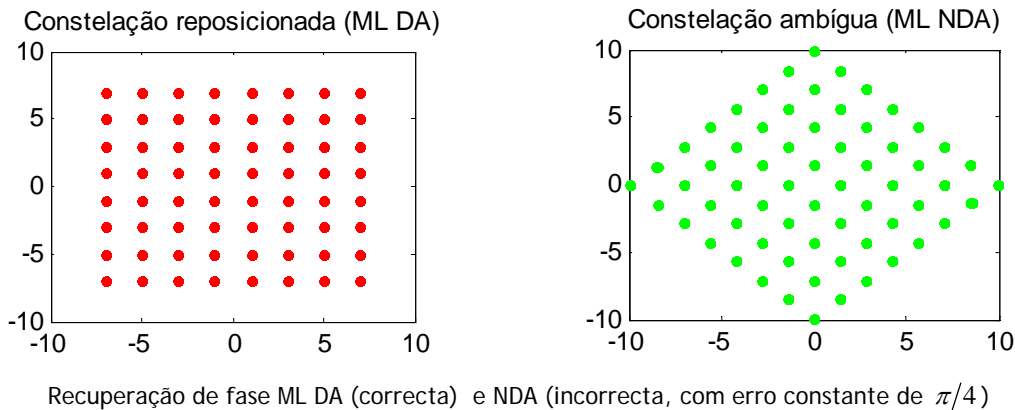
© Sílvio A. Abrantes  
Maio de 2009

### 1. O que aconteceu?

Ao elaborar exercícios de sincronização precisei de simular a recuperação da fase da portadora em QAM usando os métodos de máxima verosimilhança (ML) *Data-Aided* (DA) e *Non Data-Aided* (NDA) em tempo amostrado. Quanto ao primeiro, correu tudo bem, quanto ao segundo dava-me sempre um erro de  $45^\circ$  em relação ao valor correcto. Estava a usar a expressão 4.7.84 do livro de referência de sincronização digital de Mengali e d'Andrea [1]

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left[ \sum_{k=1}^L z^4(k) \right], \quad (1)$$

onde  $z(k)$  é a amostra QAM complexa recebida, e o resultado era sempre este, no exemplo de 64-QAM que usei:



O erro de  $\pi/4$  era fixo, independentemente do valor da fase a estimar. Teria eu feito alguma coisa mal? Concluí que não. Experimentei normalizar a energia da constelação QAM (de modo que  $\langle E \rangle = 1$ ) e... nada, sempre o mesmo erro de  $\pi/4$ . Fui então investigar e concluí que a eq. (1) está errada. Eis o relatório.

### 2. À procura do erro

Seja  $c_k = a_k + jb_k$  um ponto genérico da constelação  $M$ -QAM, com  $a_k = \pm d_{\min}/2, \pm 3d_{\min}/2, \dots$ ,  $b_k = \pm d_{\min}/2, \pm 3d_{\min}/2, \dots$ ,  $A_2 = E[a_k^2] = E[b_k^2] = \frac{M-1}{12} d_{\min}^2$  e  $A_4 = E[a_k^4] = E[b_k^4]$ . Seja também  $z(k) = c_k e^{j\theta}$  o ponto sem ruído à saída do filtro adaptado ou do correlacionador obtido de  $c_k$  por rotação da fase desconhecida  $\theta$ .

- Mengali e d'Andrea dizem (pág. 282, eq. 5.7.82) que  $E[z^4] = 2(A_4 - 3A_2^2)e^{j4\theta}$ . Fui verificar:

Se  $z(k) = c_k e^{j\theta}$  então  $E[z^4(k)] = E[c_k^4] e^{j4\theta}$ . Calculei  $E[c_k^4]$  e concluí que

$$c_k^4 = a_k^4 - 6a_k^2 b_k^2 + b_k^4 + j4a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)$$

$$\begin{aligned}
E[c_k^4] &= E[a_k^4] - 6E[a_k^2 b_k^2] + E[b_k^4] + j4E[a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)] = \\
&= 2E[a_k^4] - 6\left\{E[a_k^2]\right\}^2 + j4E[a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)] = \\
&= 2(A_4 - 3A_2^2) + j4E[a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)]
\end{aligned}$$

Com um desenvolvimento idêntico concluí que  $E[c_k^{*4}] = 2(A_4 - 3A_2^2) - j4E[a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)]$ , isto é, que  $E[c_k^{*4}] = E[c_k^4]^*$ . Contudo, as partes imaginárias destes quartos momentos são nulas visto que  $E[a_k b_k (a_k^2 - b_k^2)] = E[a_k^3 b_k] - E[a_k b_k^3] = 0$ . Logo,  $E[c_k^4]$  é um número real,  $E[c_k^4] = 2(A_4 - 3A_2^2)$ , e  $E[z^4(k)] = 2(A_4 - 3A_2^2)e^{j4\theta}$ , como está em [1]. Ou seja,

$$\theta = \frac{1}{4} \arg\left\{(A_4 - 3A_2^2)E[z^4(k)]\right\}.$$

Outras referências, como [2] e [3], também se referem a  $E[c_k^4]$  justamente como um número real:  $E[c_k^{*4}]$  é “uma constante real negativa” e “um número real negativo”, respectivamente<sup>1</sup>. Em apêndice mostro que assim é, realmente:  $E[c_k^4]$  vale  $-\frac{M^2 - 1}{60}d_{\min}^4$ , bem negativo até. Mas... em [1], pág. 282, é afirmado que  $A_4 - 3A_2^2 > 0$ ! Hum... deve ser este o problema do  $\pi/4$ . Realmente, se  $A_4 - 3A_2^2 > 0$  então  $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg\left\{E[z^4(k)]\right\}$ , mas se for  $A_4 - 3A_2^2 < 0$  então  $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg\left\{-E[z^4(k)]\right\}$ , que difere do ângulo anterior em...  $\pi/4$ . Pois.

Um aparte: nas simulações que fiz a parte imaginária de  $E[c_k^4]$  não é nula. É pequena, sem dúvida, mas não é nula porque no computador a média é calculada a partir de um número finito de amostras e difícil seria que se verificasse exactamente a igualdade  $E[a_k^3 b_k] = E[a_k b_k^3]$ , ou melhor,  $\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L a_k^3 b_k = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L a_k b_k^3$ . Enfim, digamos que  $E[c_k^4] \approx \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^4 \approx 2(A_4 - 3A_2^2) + j\frac{4}{L} \left[ \sum_{k=1}^L a_k^3 b_k - \sum_{k=1}^L a_k b_k^3 \right]$ . Como a parte imaginária é muito pequena poderemos então escrever

$$\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^4 = C e^{j\phi}, \text{ com } C > 0 \text{ e } \phi \approx \pi. \quad (2)$$

- Em [1], pág. 282, é afirmado que, como  $A_4 - 3A_2^2 > 0$ , se pode fazer  $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg\left\{E[z^4(k)]\right\}$  e também  $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg\left[\sum_{k=1}^L z^4(k)\right]$  (eq. (1)), substituindo a média de conjunto pela média temporal. Assim seria se fosse  $A_4 - 3A_2^2 > 0$  mas acontece que não é verdade, como já disse. Sendo afinal  $A_4 - 3A_2^2 < 0$ , a eq. (1) devia ser substituída por

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg\left[-\sum_{k=1}^L z^4(k)\right]. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Nesse caso pergunto: sendo real porquê então o uso do complexo conjugado no cálculo do valor médio?

Assim se induz em erro os leitores.

- Fui consultar o artigo de 1994 de Moeneclaey e de Jonghe [4] onde Mengali e d'Andrea se basearam e verifiquei que... a expressão ML NDA do estimador da quarta potência não é a que os investigadores italianos usam. A expressão original de [4] (eq. 12) é

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left\{ E \left[ c_k^{*4} \right] \sum_{k=1}^L z^4(k) \right\}, \quad (4)$$

formulação retomada em [2] [5] [6], entre outros. É mais rigorosa que a eq. (3), como se vai mostrar. De notar que, sendo  $E \left[ c_k^4 \right]$  um número real, só faz sentido usar o conjugado  $E \left[ c_k^{*4} \right]$  se este valor médio representar, afinal, a

média de  $L$  amostras, isto é,  $E \left[ c_k^{*4} \right] \approx \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^{4*} = C e^{-j\phi}$ .

- Fica agora claro por que é que a estimativa (4) é a melhor de todas: como dispomos de um conjunto de  $L$  amostras  $z(k)$  calculamos  $\sum_{k=1}^L z^4(k) = \left( \sum_{k=1}^L c_k^4 \right) e^{j4\theta} = L C e^{j(4\theta+\phi)}$ , de fase  $4\theta + \phi$ ; mas como o que queremos é  $4\theta$  e não  $4\theta + \phi$  temos de eliminar  $\phi$  multiplicando  $\sum_{k=1}^L z^4(k)$  pelo complexo conjugado de  $\sum_{k=1}^L c_k^4$ :

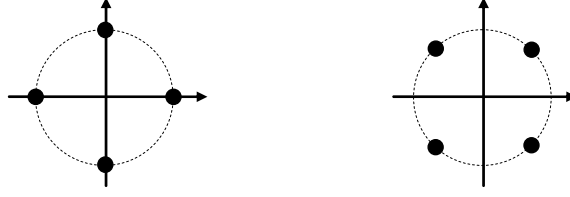
$$\sum_{k=1}^L z^4(k) \sum_{k=1}^L c_k^{4*} = \left( L C e^{j(4\theta+\phi)} \right) \left( L C e^{-j\phi} \right) = L^2 C^2 e^{j4\theta}.$$

Daqui chegamos logo à eq. (4) pois estamos a considerar que  $E \left[ c_k^{*4} \right] \approx \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^{4*}$ .

- Poderíamos ser tentados a usar  $E \left[ c_k^4 \right] \approx \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^4$  na eq. (4) em vez de  $E \left[ c_k^{*4} \right] \approx \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^{4*}$ . Constatei, por simulação, que isso não deve ser feito pois iríamos obter uma pior estimativa de  $\theta$ . Agora já sabemos porquê: iríamos obter um complexo de ângulo  $4\theta + 2\phi$  o qual, dividido por 4, nos levaria a  $\theta + \phi/2$  e não ao pretendido  $\theta$ , como se mostra a seguir:

$$\left( \sum_{k=1}^L c_k^4 \right) \left( \sum_{k=1}^L z^4(k) \right) = L^2 C^2 e^{j(4\theta+2\phi)}.$$

- Cuidado com a eq. (1) em QPSK! Aparentemente é essa a expressão a usar pois em MPSK a estimativa ML NDA é dada por  $\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left[ \sum_{k=1}^L z^M(k) \right]$ . O que concluí destas investigações é que a eq. (1) pode ser usada em QPSK se os pontos da constelação estiverem nos eixos, como na figura seguinte à esquerda. Se, pelo contrário, a constelação for a da direita (4-QAM, portanto) então deverá ser usada a eq. (3).



Constelações QPSK: a eq. (1) serve para a da esquerda e a eq. (3) para a da direita.

### 3. Conclusões

A conclusão a tirar das considerações anteriores e das simulações que fiz é que a estimativa ML NDA da fase da portadora QAM mais rigorosa das aqui referidas é obtida pela expressão original de Moeneclaey e de Jonghe

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left\{ E \left[ c_k^{*4} \right] \sum_{k=1}^L z^4(k) \right\}.$$

Contudo, exige o conhecimento de  $c_k$  e de  $E \left[ c_k^{*4} \right]$ , um parâmetro característico de cada constelação QAM – mas, atenção, o que o computador realmente calcula não é o número real  $E \left[ c_k^{*4} \right]$  mas sim o complexo  $\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L c_k^{*4} \neq E \left[ c_k^{*4} \right]$ . Como o ângulo  $\phi$  em  $E \left[ c_k^{*4} \right] = \left| E \left[ c_k^4 \right] \right| e^{-j\phi}$  está muito próximo de  $\pi$  rad pode admitir-se sem dificuldade usar a estimativa (3), mais simples embora menos precisa,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left[ - \sum_{k=1}^L z^4(k) \right],$$

também aplicável às constelações QPSK “a 45°” (4-QAM). O que não se deve usar em QAM é a expressão do livro de Mengali e d’Andrea. Isso não, e ponto final.

### 4. Apêndice

Vai demonstrar-se que  $A_4 - 3A_2^2 < 0$  em constelações QAM quadradas.

Já sabemos que  $A_2 = E \left[ a_k^2 \right] = E \sqrt{M-PAM} = \frac{M-1}{12} d_{\min}^2$  e falta conhecer o quarto momento,  $A_4 = E \left[ a_k^4 \right]$ .

Sendo  $a_k = \pm d_{\min}/2, \pm 3d_{\min}/2, \dots$  e  $d_{\min} = 2\sqrt{E_0}$  então

$$A_4 = \frac{2E_0^2}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} (2i-1)^4 = \frac{d_{\min}^4}{8\sqrt{M}} \sum_{i=1}^n (2i-1)^4, \quad (5)$$

em que  $n = \sqrt{M}/2$ . O desenvolvimento do somatório leva-nos a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i-1)^4 &= 16 \sum_{i=1}^n i^4 - 32 \sum_{i=1}^n i^3 + 24 \sum_{i=1}^n i^2 - 8 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 = \\ &= 16S_4(n) - 32S_3(n) + 24S_2(n) - 8S_1(n) + n \end{aligned} \quad (6)$$

onde, evidentemente,  $S_p(n) = \sum_{i=1}^n i^p$ . Uma consulta adequada na internet diz-nos que estas somas de potências são dadas pelas expressões

$$S_1(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) \quad S_2(n) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) \quad S_4(n) = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

Substituindo-as em (6) somos conduzidos a  $\sum_{i=1}^n (2i-1)^4 = \frac{16}{5}n^5 - \frac{8}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$  e depois, usando a eq. (5), a

$$A_4 = \frac{3M^2 - 10M + 7}{240} d_{\min}^4.$$

Estamos próximos do objectivo: substituindo as expressões de  $A_2$  e  $A_4$  em  $A_4 - 3A_2^2$  obtemos finalmente

$$A_4 - 3A_2^2 = -\frac{M^2 - 1}{120} d_{\min}^4 < 0 \quad c.q.d.$$

#### 4.1 Constelações particulares

A tabela seguinte apresenta os valores de  $A_2$ ,  $A_4$  e  $A_4 - 3A_2^2$  para algumas constelações particulares, com  $d_{\min} = 2$ .

Parâmetro	16-QAM	64-QAM	256-QAM	1024-QAM
$A_2 = E[a_k^2]$	5	21	85	341
$A_4 = E[a_k^4]$	41	777	12937	209033
$A_4 - 3A_2^2$	-34	-546	-8738	-139810

Se desejarmos que a energia média da constelação seja unitária,  $\langle E \rangle = \frac{M-1}{6} d_{\min}^2 = 1$ , então  $d_{\min}^2 = \frac{6}{M-1}$ .

Neste caso  $A_4 - 3A_2^2 = -\frac{3}{10} \frac{M+1}{M-1}$ , com limite superior  $\lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{3}{10} \frac{M+1}{M-1} \right) = -\frac{3}{10}$ . É o que acontece nas quatro constelações da tabela, onde  $A_4 - 3A_2^2$  vale (indo de 16 para 1024 pontos) -0,34, -0,309, -0,302 e -0,300.

## 5. Referências

- [1] U. Mengali e A. N. d'Andrea, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, 1997.
- [2] J. Preston e C. N. Georghiades, "Algorithms for Carrier Acquisition for QAM Constellations", *1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, Ulm, Alemanha, 29 Junho-4 de Julho de 1997.
- [3] E. Serpedin, P. Ciblat, G. Giannakis e O. Loubaton, "Performance Analysis of Blind Carrier Phase Estimators for General QAM Constellations", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, N° 8, pp. 1816-1823, Agosto de 2001.
- [4] M. Moeneclaey e G. de Jonghe, "ML-Oriented NDA Carrier Synchronization for General Rotationally Symmetric Signal Constellations", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-42, n° 8, pp. 2531-2533, Agosto de 1994.
- [5] C. N. Georghiades, "Blind Carrier Phase Acquisition for QAM Constellations", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 45, N° 11, pp. 1477-1486, Novembro de 1997.
- [6] C. N. Georghiades, "Algorithms for Phase Acquisition for QAM Constellations", *5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems (5th IEEE MED)*, Chipre, 21-23 de Julho de 1997.