

Resumindo e concluindo...

TeleTextos de bolso e de trazer por casa, suavemente, suavemente

Em busca da fase perdida

© Sílvio A. Abrantes

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto
Porto, Portugal
sam@fe.up.pt

Fevereiro de 2009

Conteúdo

1.	Introdução	1
2.	Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos dados	2
3.	Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos dados	3
3.1.	Eliminação da ambiguidade de fase com a Palavra Única	4
3.1.1.	Uso alternativo da Palavra Única	6
3.1.2.	Comprimento da Palavra Única	6
4.	Recuperação ML da fase sem temporização de símbolos nem ajuda de dados	7
5.	Referências bibliográficas	8

1. Introdução

A situação é esta: conhecemos a frequência da portadora da modulação digital em uso, sabemos quando os símbolos de informação começam e acabam, as amostras de sinal de que o receptor precisa são recolhidas nos instantes adequados mas... não conhecemos a fase da portadora, algo que é essencial a um desmodulador coerente. Como se mostra na Fig. 1, um desmodulador coerente gera uma onda sinusoidal que, além da frequência, deve ter a mesma fase do sinal recebido ($\hat{\theta} = \theta$). E porquê? Porque um erro de fase $\Delta\theta = \hat{\theta} - \theta$ da onda de referência faz rodar a constelação de pontos da modulação de um ângulo $\Delta\theta$ (ver Fig. 2), aumentando a probabilidade de símbolo errado.

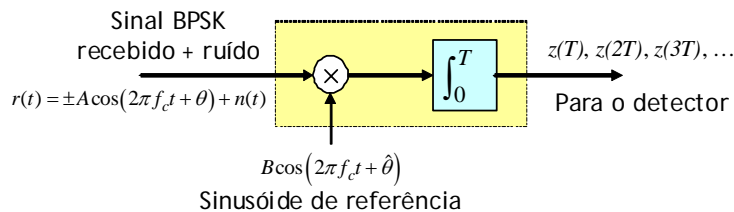


Fig. 1 Desmodulador coerente de BPSK.

À tarefa de “descobrir” qual é a fase da portadora chama-se habitualmente *recuperação da fase da portadora*. Antes de entregar o sinal recebido ao detector o receptor coerente terá de fazer essa “descoberta”.

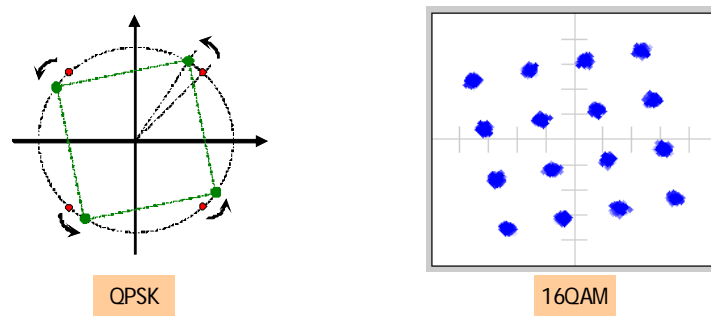


Fig. 2 Dois exemplos de rotação de constelação devida a erro de fase.

Há vários métodos de busca da fase “perdida” [1]. Neste TeleTexto vamos limitar-nos exclusivamente às modulações digitais lineares, como MPSK e QAM, e aos métodos de Máxima Verosimilhança, bem apropriados a uma realização digital¹. Não haverá aqui referências a PLLs, “Costas Loops” ou métodos analógicos e também não nos defrontaremos com métodos em malha fechada, com “feedback”: vamos privilegiar exclusivamente os métodos que processam sequências de amostras - números, portanto - em malha aberta, sem realimentação, por isso mais adequados a situações que exigem um tempo de aquisição de sincronismo curto. Supondo sempre que conhecemos a frequência da portadora vão ser apresentadas três abordagens de Máxima Verosimilhança: em duas a temporização de símbolos é conhecida e na terceira não.

A demanda da fase perdida pode ser ajudada pela própria mensagem ou não. Se o for a tarefa está mais facilitada, claro; se não o for é mais difícil mas também se consegue. Diz-se que a primeira técnica é “Data-Aided”, ou apenas DA, e a segunda “Non-Data-Aided”, ou NDA. Começemos pelo que é mais fácil, avisando já que não apresentaremos demonstrações ou justificações dos métodos considerados, apenas resultados finais.

2. Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos dados

A estimativa ML da fase da portadora ajudada pelos símbolos da mensagem requer o conhecimento de um número L de amostras observadas $z(k)$, para $k=1,2,\dots,L$, e igual número de símbolos enviados c_k . Estes, que poderão ter sido obtidos numa fase de treino, são complexos e as amostras $z(k)$, também complexas, são colhidas à saída do filtro adaptado ou do correlacionador do receptor durante um intervalo de observação de LT segundos (T é a duração de cada símbolo). A “colheita” faz-se nos instantes de ordem k (isto é, em $t=kT+\tau$, em que τ está relacionado com a temporização, conhecida, dos símbolos). Chamando $\hat{\theta}$ à estimativa de fase, é dada pela seguinte expressão [2], em que $\arg(\mathbf{x}) = \arctg\left[\frac{\text{Im}(\mathbf{x})}{\text{Re}(\mathbf{x})}\right]$ é a fase (ângulo) do complexo $\mathbf{x} = \text{Re}(\mathbf{x}) + j\text{Im}(\mathbf{x})$ na sua representação polar:

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k=1}^L c_k^* z(k) \right\}.$$

E pronto, já está, é só isto! O correspondente diagrama de blocos encontra-se na Fig. 3.

¹ Designá-los-emos simplesmente de métodos ML, de “Maximum Likelihood”. Se não sabe o que é isto de estimação ML o melhor é consultar o TeleTexto que trata do assunto.

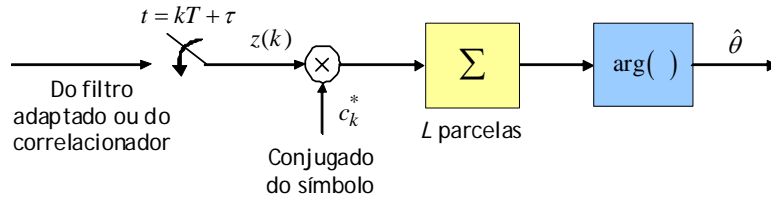


Fig. 3 Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos símbolos

Exemplo 1: Estimação DA de Máxima Verosimilhança

Consideremos a recepção de um sinal QPSK cujos pontos da constelação estão situados nos eixos do espaço de sinal em $1, j, -1$ e $-j$, portanto nos ângulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e 270° , respectivamente. Dispondo dos valores de c_k e $z(k)$ da tabela seguinte, qual é a estimativa ML da fase da portadora?

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	$0,38 - j0,94$	$-0,93 - j0,39$	$0,93 + j0,38$	$0,92 + j0,38$	$-0,39 + j0,92$
c_k	-1	j	$-j$	$-j$	1
$c_k^* z(k)$	$-0,38 + j0,94$	$-0,39 + j0,93$	$-0,38 + j0,93$	$-0,38 + j0,92$	$-0,39 + j0,92$

Vamos usar $\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) \right\}$. Na última linha da tabela estão os produtos $c_k^* z(k)$, cuja soma é

o complexo $\sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) = -1,92 + j4,64$, de ângulo de fase $\arctan\left(\frac{4,64}{-1,92}\right) = 1,9631 \text{ rad}$, ou $112,479^\circ$.

É esta a nossa estimativa ML da fase da portadora QPSK: $\hat{\theta} = 112,479^\circ$. Bastante fácil!

3. Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos dados

Continuamos a conhecer a frequência da portadora e a temporização dos símbolos mas agora não conhecemos os dados, só as L amostras $z(k)$. A estimativa NDA de máxima verosimilhança em constelações invariantes à rotação de $2\pi/N$ é dada [1] por

$$\text{MPSK } (N = M): \hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left[\sum_{k=1}^L z^M(k) \right] \quad \text{QAM } (N = 4): \hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left[-\sum_{k=1}^L z^4(k) \right]$$

O que são constelações invariantes à rotação de $2\pi/N$? São as constelações de MPSK e QAM. No primeiro caso a rotação de $2\pi/N = 2\pi/M$ não altera a constelação (ora experimente com 8-PSK, por exemplo) e o mesmo acontece em QAM se rodarmos a constelação de $2\pi/N = 2\pi/4 = \pi/2$ (experimente de novo).

Continua a ser fácil recuperar a fase da portadora: dispondo de L amostras $z(k)$, $k = 1, 2, \dots, L$, à saída do filtro adaptado ou correlacionador, só temos que elevar cada uma à N -ésima potência, somar tudo, determinar o ângulo de fase da soma ou do seu simétrico e dividir por N , como no diagrama de blocos da Fig. 4. Porém, a estimativa agora obtida fica limitada à gama $\pm\pi/N$ pois a

fase de $\sum_{k=1}^L z^N(k)$, como qualquer complexo, está limitada a $\pm\pi$.

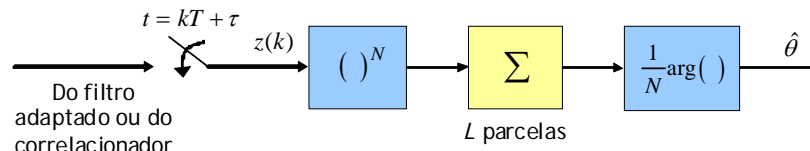


Fig. 4 Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos símbolos

Exemplo 2: Estimação NDA de Máxima Verosimilhança

Retomemos a tabela do Exemplo 1 mas agora só com os valores das amostras $z(k)$. Qual é a estimativa ML da fase da portadora QPSK?

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	$0,38 - j0,94$	$-0,93 - j0,39$	$0,93 + j0,38$	$0,92 + j0,38$	$-0,39 + j0,92$
$z^4(k)$	$0,036 + j1,056$	$-0,018 + j1,034$	$0,020 + j1,019$	$0,004 + j0,982$	$-0,033 + j0,996$

Agora usaremos $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left[\sum_{k=1}^5 z^4(k) \right]$ pois em QPSK $N = M = 4$. Na última linha da tabela estão as

potências $z^4(k)$, cuja soma é o complexo $\sum_{k=1}^5 z^4(k) = 0,0085 + j5,0869$. O seu ângulo de fase a

dividir por 4 é $\frac{1}{4} \arctan \left(\frac{5,0869}{0,0085} \right) = 0,39228$ rad, ou $22,476^\circ$, e é esta a nossa estimativa ML da fase

da portadora. Ora compare-se este valor com o obtido no Exemplo 1, onde pudemos dispor dos dados, ao contrário de agora. Parece que está alguma coisa mal...

Na verdade, temos um pequeno problema: a estimativa NDA de fase é *ambígua* ou, como também se diz, há uma *ambiguidade de fase* de $2\pi/N$ radianos. De facto, como $\hat{\theta}$ está limitada à gama $\pm\pi/N$ não abrange valores da fase θ fora dessa gama o que faz com que, dada a simetria da constelação, tenhamos não uma mas N igualmente plausíveis estimativas de fase $\hat{\theta} = \theta + \Delta\theta + 2\pi m/N$, em que $0 \leq m \leq N-1$ e $\Delta\theta$ é um eventual e presumivelmente pequeno erro de estimação. Pergunta-se: qual desses $\hat{\theta}$ é a melhor estimativa da verdadeira fase θ ? Como determinar o valor adequado de m ? O problema soluciona-se procedendo a uma codificação/descodificação diferencial ou então usando a chamada "Unique Word". Seguindo [2], vamos ver como usar esta *Palavra Única*.

3.1. Eliminação da ambiguidade de fase com a Palavra Única

Consideremos a modulação MPSK e suponhamos que a recuperação de fase é perfeita ($\Delta\theta = 0$). A ambiguidade de fase é $2\pi/M$ e queremos determinar o valor de m em $\theta = \hat{\theta} - 2\pi m/M$. A questão resolve-se antecedendo a sequência a transmitir de um prefixo composto de L_{UW} símbolos conhecidos - a tal Palavra Única. Então, na posse de $L > L_{UW}$ amostras $z(k)$ recebidas, das quais as primeiras L_{UW} correspondem à Palavra Única, estimamos a fase normalmente e depois, como essa estimativa $\hat{\theta}$ é ambígua, efectuamos os seguintes cálculos simples:

1. Para cada k , $1 \leq k \leq L_{UW}$, calcula-se o complexo

$$y(k) = z(k)c_k^* e^{-j\hat{\theta}}$$

Não esquecer que para $1 \leq k \leq L_{UW}$ os símbolos c_k são a própria e conhecida *Palavra Única*.

2. Determina-se a média dos L_{UW} complexos $y(k)$:

$$Y = \frac{1}{L_{UW}} \sum_{k=1}^{L_{UW}} y(k)$$

3. Para cada valor de m em $0 \leq m \leq M-1$ calcula-se a parte real de $Ye^{j2\pi m/M}$:

$$\operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi m/M}\right), \quad 0 \leq m \leq M-1$$

Ao todo temos agora M valores reais: $\operatorname{Re}(Y)$, $\operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi/M}\right)$, $\operatorname{Re}\left(Ye^{j4\pi/M}\right)$, etc.

4. Escolhe-se o valor de m que corresponde ao maior dos M reais:

$$\tilde{m} = \arg \max_m \operatorname{Re}\left\{Ye^{j2\pi m/M}\right\}$$

Por outras palavras:

$$\text{Escolhe-se } \tilde{m} \text{ se } \operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi \tilde{m}/M}\right) = \max\left[\operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi m/M}\right)\right], \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

A estimativa ML de fase, agora enxuta da ambiguidade inicial, é $\hat{\theta} - 2\pi\tilde{m}/M$.

Para quem gostar de concisão: o critério de escolha de \tilde{m} deve obedecer a

$$\tilde{m} = \arg \max_m \operatorname{Re}\left\{e^{j2\pi m/M} \sum_{k=1}^{L_{UW}} z(k)c_k^* e^{-j\hat{\theta}}\right\}$$

Exemplo 3: Eliminação da ambiguidade de fase

Vamos tentar eliminar a ambiguidade da estimativa do Exemplo 2, $\hat{\theta} = 0,39228$ rad, usando uma Palavra Única de $L_{UW} = 2$ símbolos, -1 e j (os dois primeiros da tabela do Exemplo 1). Seguindo os passos do respectivo algoritmo obtemos sucessivamente

$$1) \quad y(1) = z(1)c_1^* e^{-j\hat{\theta}} = 0,0082 + j1,0139 \quad y(2) = z(2)c_2^* e^{-j\hat{\theta}} = -0,0048 + j1,0085$$

$$2) \quad \text{Média dos } y(k) : Y = \frac{1}{2}[y(1) + y(2)] = 0,0017 + j1,0112$$

- 3) Cálculo das partes reais de $Ye^{j2\pi m/4}$, para $m = 0, 1, 2, 3$:

m	0	1	2	3
$\operatorname{Re}(Ye^{j2\pi m/4})$	0,0017	-1,0112	-0,0017	1,0112

- 4) Escolhemos $\tilde{m} = 3$, é claro.

Sendo assim, a estimativa de fase sem ambiguidade é $\hat{\theta} - 2\pi\tilde{m}/M = 0,39228 - 6\pi/4 = 1,9631$ rad, ou $112,476^\circ$. Agora sim, a nova estimativa já condiz com a que obtivemos no Exemplo 1 com a ajuda dos dados!

Exemplo 4:

Recuperação da portadora em BPSK com e sem ajuda de dados

Neste exemplo vamos recuperar a fase de uma portadora de BPSK com os métodos DA e NDA. Dispomos das amostras complexas $z(k)$ e dos símbolos reais $c_k = \pm 1$ da tabela seguinte. A primeira coluna indica o método onde o conteúdo das linhas é usado². A ambiguidade da estimativa no método sem ajuda é suprimida através de uma Palavra Única de dois bits [-1 1].

k		1	2	3	4	5
	$z(k)$	$-1,000 - j0,190$	$0,990 + j0,200$	$-0,990 - j0,190$	$-0,980 - j0,190$	$0,980 + j0,200$
DA	c_k	-1	1	-1	-1	1
DA	$c_k^* z(k)$	$1,000 + j0,190$	$0,990 + j0,200$	$0,990 + j0,190$	$0,980 + j0,190$	$0,980 + j0,200$
NDA	$z^2(k)$	$0,964 + j0,380$	$0,940 + j0,396$	$0,944 + j0,376$	$0,920 + j0,372$	$0,920 + j0,392$
UW	$y(k)$	$1,018 - j0,006$	$1,010 + j0,006$	-	-	-

No método DA a quarta linha da tabela conduz-nos ao complexo $\sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) = 4,94 + j0,97$ e à sua fase $\hat{\theta}_{DA} = 11,109^\circ$. No método NDA a quinta linha conduz-nos a $\sum_{k=1}^5 z^2(k) = 4,693 + j1,917$ e a metade da sua fase, $\hat{\theta}_{NDA} = 11,108^\circ$, valor que de tão próximo de $\hat{\theta}_{DA}$ nos leva a prever que é mesmo esse o valor final de $\hat{\theta}_{NDA}$. E assim é. Realmente, a Palavra Única elimina-nos a dúvida inerente a $\hat{\theta}_{NDA}$ através da média da última linha, $Y = \frac{1}{2}[y(1) + y(2)] = 1,014 - j0,0004$, e dos dois reais $\text{Re}(Y) = 1,0139$ (para $m = 0$) e $\text{Re}(Ye^{j2\pi/2}) = -1,0139$ (para $m = 1$): como o primeiro valor é o maior dos dois escolhemos $\tilde{m} = 0$ e não precisamos de corrigir $\hat{\theta}_{NDA}$, como antecipáramos.

3.1.1. Uso alternativo da Palavra Única

A Palavra Única pode ser usada de outra maneira, sem os cálculos anteriores. Vejamos como. Em BPSK ocorre uma ambiguidade de fase de 180° - ou seja, há duas alternativas de fase à escolha - em QPSK e em QAM a ambiguidade é de 90° - há quatro alternativas de fase - enfim, em MPSK a ambiguidade de fase reparte-se por M possibilidades. Então uma maneira de ficarmos sem dúvidas é detectar os primeiros L_{UW} símbolos de acordo com as M possibilidades. Aquela cuja detecção dê origem aos símbolos da Palavra Única é a que deve ser escolhida. Imaginemos, por exemplo, que em QPSK usávamos a Palavra Única de três símbolos $s_1 s_4 s_2$. Se ao detectar os primeiros três símbolos da mensagem com as quatro ambiguidades 50° , 140° , -130° e -40° o resultado for, respectivamente, $s_2 s_1 s_3$, $s_1 s_4 s_2$, $s_4 s_3 s_1$ e $s_3 s_2 s_4$ qual deve ser a nossa escolha? Claro... 140° !

3.1.2. Comprimento da Palavra Única

A Palavra Única não deve ser muito curta senão correremos o risco de errarmos a escolha do inteiro \tilde{m} . Qual deve ser então o seu comprimento, L_{UW} ? Para responder precisamos de conhecer a probabilidade de falsa resolução de ambiguidade, P_{fra} . Segundo [2], em MPSK vale

$$P_{fra} = Q\left(\sqrt{2L_{UW} E/N_0}\right) \quad M = 2$$

$$P_{fra} = 2Q\left(\sqrt{2L_{UW} E/N_0} \sin \pi/M\right) \quad M \geq 4$$

² Como é de prever, UW significa "Unique Word".

quando o ruído é gaussiano branco de densidade espectral de potência $N_0/2$ e E é a energia dos símbolos MPSK.

Sabemos bem que quando a recuperação da fase da portadora é perfeita a probabilidade de símbolo errado em MPSK é igual a $P_e = 2Q\left(\sqrt{2E/N_0} \sin \pi/M\right)$ para $M \geq 4$ e a $P_b = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$ para $M = 2$ (BPSK), em que E_b é a energia de bit. Se ocorrerem erros de resolução de ambiguidade passamos a ter de considerar uma probabilidade média de símbolo errado que depende de P_{fra} , dada por $\bar{P}_e = P_e(1 - P_{fra}) + P_{fra} \approx P_e + P_{fra}$. Ora se não quisermos degradação do desempenho temos de garantir que $P_{fra} \ll P_e$.

Exemplo 5: Cálculo do comprimento da Palavra Única

Consideremos QPSK com $E/N_0 = 13,8$ dB. Na ausência de defeitos de sincronização de fase a probabilidade de símbolo errado vale $P_e = 2Q\left(\sqrt{E/N_0}\right) = 10^{-6}$. Se desejarmos que a probabilidade de falsa resolução de ambiguidade seja muito pequena face a P_e – por exemplo, $P_{fra} = 10^{-8}$ – então de $P_{fra} = 2Q\left(\sqrt{2L_{UW} E/N_0} \sin \pi/4\right) = 2Q\left(\sqrt{L_{UW} E/N_0}\right) = 10^{-8}$ concluímos que a Palavra Única deve conter 14 símbolos:

$$L_{UW} = \frac{1}{E/N_0} \left[Q^{-1}(0,5P_{fra}) \right]^2 = 14.$$

Imaginemos uma outra situação em QPSK: $E/N_0 = 10$ dB e uma Palavra Única composta de apenas dois símbolos. Qual é a probabilidade média de símbolo errado, \bar{P}_e ? De quanto se degradou a probabilidade de símbolo errado, P_e , por causa dos erros na recuperação da fase da portadora? Começemos por P_{fra} e P_e :

$$P_{fra} = 2Q\left(\sqrt{L_{UW} E/N_0}\right) = 2Q\left(\sqrt{2 \times 10}\right) = 7,74 \cdot 10^{-6}$$

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{E/N_0}\right) = 2Q\left(\sqrt{10}\right) = 1,565 \cdot 10^{-3}$$

Deste modo $\bar{P}_e = P_e(1 - P_{fra}) + P_{fra} = 1,573 \cdot 10^{-3}$, correspondendo a uma degradação de cerca de 0,5%.

4. Recuperação ML da fase sem temporização de símbolos nem ajuda de dados

Temos suposto que a temporização de símbolos é conhecida. Se não a conhecermos, mesmo assim a recuperação ML da fase sem a ajuda dos dados pode ser usada em MPSK. O que é preciso é que a amostragem do sinal à saída do correlacionador ou do filtro adaptado seja realizada a uma cadência mais elevada: em vez de símbolo a símbolo (de T em T segundos) deve ser feita várias vezes por símbolo (digamos, N_s vezes, nos instantes $t = kT/N_s$). A nova estimativa de θ passa a usar $N_s L$ amostras $z(kT/N_s)$, recolhidas de T/N_s em T/N_s segundos, e a expressão respectiva é

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{N_s L} z^M(kT/N_s) \right\} \quad (MPSK).$$

Qual deve ser o valor do factor de sobreamostragem N_s ? Vejamos quanto vale se usarmos impulsos de cosseno elevado com factor de *roll-off* α , que ocupam, como se sabe, uma largura de

Em busca da fase perdida

banda $\frac{1}{2T}(1+\alpha)$: a elevação à potência M alarga a banda M vezes, passando para $\frac{M}{2T}(1+\alpha)$ e, de acordo com o teorema da amostragem, a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, o dobro da maior frequência do sinal, ou seja, $f_s \geq 2\frac{M}{2T}(1+\alpha)$; mas $f_s = N_s/T$. Portanto,

$$N_s \geq M(1+\alpha).$$

Com sinalização rectangular a largura de banda ocupada após elevação à M -ésima potência é M/T pelo que, seguindo raciocínio idêntico ao anterior, concluímos que o factor de sobreamostragem deve respeitar

$$N_s \geq 2M.$$

Exemplo 6: Recuperação da fase em BPSK sem temporização de símbolos nem ajuda de dados

Vamos recuperar a fase da portadora de BPSK a partir das vinte amostras $z(kT/N_s)$ da tabela. O factor de sobreamostragem vale $N_s = 4$.

k	$z(kT/N_s)$	k	$z(kT/N_s)$	k	$z(kT/N_s)$	k	$z(kT/N_s)$
1	$-1,000 - j0,190$	6	$0,692 + j0,141$	11	$-1,338 - j0,260$	16	$0,374 + j0,079$
2	$-0,268 - j0,047$	7	$0,184 + j0,041$	12	$-1,244 - j0,242$	17	$0,980 + j0,200$
3	$0,363 + j0,077$	8	$-0,419 - j0,078$	13	$-0,980 - j0,190$	18	$1,568 + j0,317$
4	$0,805 + j0,164$	9	$-0,990 - j0,190$	14	$-0,642 - j0,123$	19	$2,115 + j0,426$
5	$0,990 + j0,200$	10	$-1,250 - j0,242$	15	$-0,181 - j0,031$	20	$2,584 + j0,519$

Obtemos $\sum_{k=1}^{20} z^2(kT/N_s) = 24,5 + j10,1$ e a estimativa pretendida é $\hat{\theta} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{10,1}{24,5}\right) = 11,247^\circ$.

5. Referências bibliográficas

- [1] Sílvio A. Abrantes, "Introdução à sincronização em modulações digitais", Março de 2007, disponível online em http://www.fe.up.pt/si/PUBLS_PESQUISA.FORMVIEW?P_ID=13765.
- [2] Mengali, Umberto e D'Andrea, Aldo N., *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, 1997.